

UNIDAD 1

TENSION NORMAL Y DEF. UNITARIA

(1)

TENSION ∇

Están distribuidos uniformemente en toda el área. Se puede calcular como

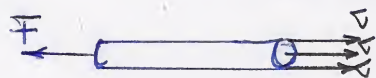
$$\nabla = \frac{F}{A} \quad \left[\frac{N}{m^2} = Pa \right]$$

[PSI]

→ HIPOTESIS: solo con F en el CG



De forma diferencial



$$\nabla = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} \Rightarrow \bar{F} = \int_A \nabla \cdot dA$$

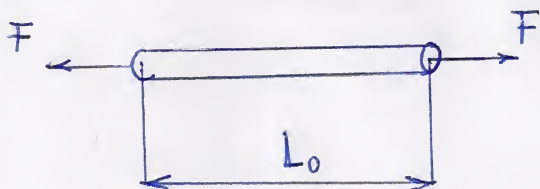
ESF. NORMALES (+) TRACCION

(-) COMPRESION

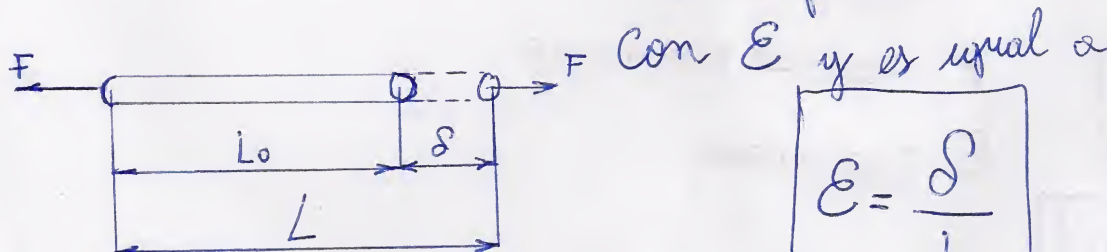
DEFORMACIÓN UNITARIA NORMAL (ϵ)

La barra cambia su longitud al ser cargada axialmente

$$\delta = L - L_0$$



La deformación unitaria, se denota



con ϵ y es igual a

$$\epsilon = \frac{\delta}{L}$$

(+) ALARGAMIENTO

(-) ACORTAMIENTO

ϵ es Odimensional, razón entre longitudes.

ϵ toma valores muy pequeños, en las barras de material estructural

Real

ESFUERZO Y DEF. EN UNIAXIAL

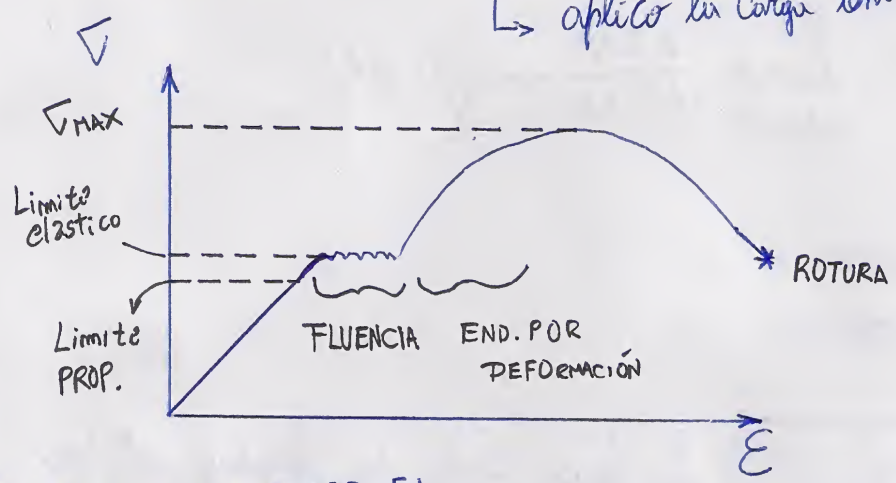
Las def. se forman en Consideraciones estáticas y geométricas.
 Se requiere que la deformación sea uniforme en todo el volumen, se req. una barra prismática, Cargas por los centros de las secc. transversales y que el material sea homogéneo.

ENSAYO DE TRACCION

↑ aplicar rápido y de manera cíclica, si interesa $\bar{\nu}$.

El ensayo puede ser estático o dinámico

↳ aplicar la carga lentamente, no interesa $\bar{\nu}$



PROPIEDADES

- LINEALIDAD
- PLASTICIDAD
- ELASTICIDAD
- ISOTROPÍA (PROP. IGUALES EN TODAS DIRECCIONES)
- ANISOTROPÍA
- ORTOTROPÍA: SIST. ORTOGONAL DONDE VEO LO MISMO
- HOMOGENEIDAD.

NOS INTERESA ENCONTRAR EL

$\sigma_{0.2}$ o σ_{FP} (Bumab) o σ_y

además σ_{ROTURA} ($\sigma_R = \sigma_U$)

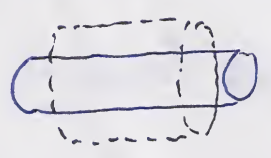
LEY DE HOOKE

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

E : MODULO DE ELASTICIDAD

ϵ : DEF. UNITARIA

RELACION DE POISSON (ν)



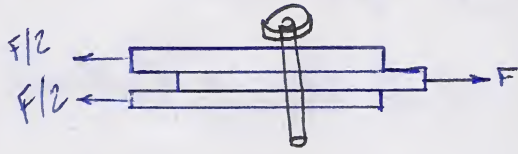
$$\nu = -\epsilon_t / \epsilon_L$$

ϵ_t es la def. transversal
 ϵ_L es def. longitudinal.

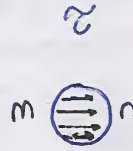
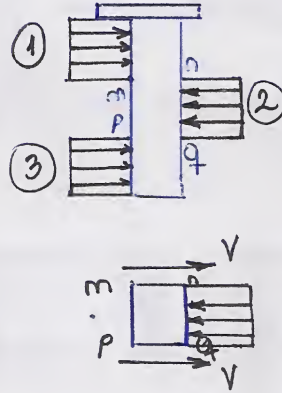
El alargamiento axial produce una contracción lateral

→ sirve en comportamiento elástico y solo si se aplica únicamente una tensión NORMAL (UNIAXIAL)

TENSIÓN DE CORTE Son aquellas que actúan de manera tangencial a la superficie.



$$\tau = \frac{F}{A} \quad \text{CORTE DIRECTO}$$



LEY DE HOOKE EN CORTE

$$\tau = G \gamma$$

G : MOD. ELASTICIDAD DE CORTE

γ : DEF. UNITARIA CORTANTE

FACTORES DE SEGURIDAD

- Resistencia: Capacidad del objeto para soportar cargas
- Estructura: objeto que debe soportarlas.

$$n = \frac{\text{RESISTENCIA REAL}}{\text{RESIST. REQUERIDA}}$$

para evitar una falla $n > 1$

Falla \rightarrow ~~derroche~~ completo
 \rightarrow Deformación

Aspectos a considerar para determinar, son la probabilidad de sobrecarga, tipo de carga, repetición o no de cargas, falla por fatiga.

ESFUERZO PERMISIBLE (σ_{PERM} ; τ_{PERM})

El n es establecido respecto a la fluencia que inicia cuando el esfuerzo de fluencia lo hace y el esfuerzo permisible se obtiene respecto de ellos.

$$\sigma_{\text{PERM}} = \frac{\sigma_y}{n_1}$$

$$\tau_{\text{PERM}} = \frac{\tau_y}{n_2}$$

En ocasiones n se aplica a esfuerzo ultimo, en materiales frágiles principalmente

$$\sigma_{\text{PERM}} = \frac{\sigma_u}{n}$$

$$\tau_{\text{PERM}} = \frac{\tau_u}{n}$$

CARGA PERMISIBLE (Carga máxima) (P)

Es la relación entre la carga permisible y la tensión permisible.

$$\text{Carga permisible} = \text{esf. permisible} \cdot \text{área}$$

tracción y compresión directa \rightarrow $P_{\text{PERM}} = \sigma_{\text{PERM}} \cdot A$

Cortante \rightarrow $V_{\text{PERM}} = \tau_{\text{PERM}} \cdot A$

A : área neta.

CENTROIDES DE AREAS PLANAS

UNIDAD II

Su posición es una propiedad geométrica importante. Propia de Cada superficie plana.

MOENTO DE
ORDEN CERO

El area de la superficie esta dada por $A = \int dA$; el dA es un elemento diferencial de coordenadas x e y . y A es el Area total de la figura.

MOENTOS ESTÁTICOS: Con respecto a x e y se definen respectivamente como

$$Q_x = \int y \cdot dA \quad Q_y = \int x \cdot dA \quad [in^3 \text{ o } mm^3]$$

Los momentos estáticos son las sumas de los productos de las areas diferenciales y sus coordenadas. Pueden ser positivos o negativos. (Depende de la posición de los ejes x, y)

Los coordenados del CENTROIDE:

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{\int x \cdot dA}{\int dA} \quad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\int y \cdot dA}{\int dA}$$

Si un area es simétrica con respecto a un eje, el Centroide se encuentra sobre dicho eje.

Si el area tiene dos ejes de simetría, la posición del Centroide se determina por inspección

Se puede descomponer las areas complejas en areas sencillas y con los integrales hechos sumatorios puede determinar C .

CENTROIDES DE AREAS COMPUESTAS

Los areas y momentos estáticos de areas compuestas se pueden calcular al sumar las propiedades correspondientes de las partes constitutivas.

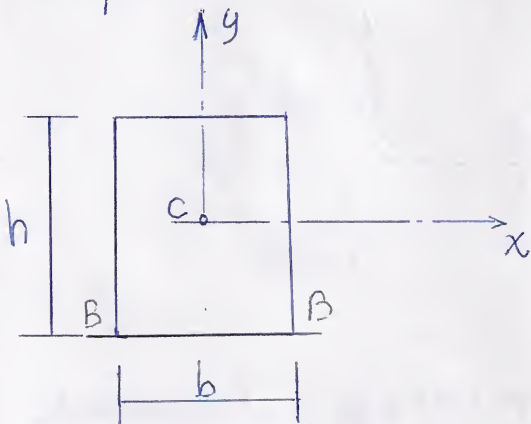
$$A = \sum A \quad Q_x = \sum y \cdot A \quad Q_y = \sum x \cdot A$$

MOMENTO DE INERCIA DE AREAS PLANAS

El momento de inercia de un area plana, esta definido por las siguientes integrales.

$$I_x = \int y^2 \cdot dA \quad I_y = \int x^2 \cdot dA$$

x e y son las coordenadas del elemento diferencial de dA . Se denominan segundos Momentos de Inercia, siempre son cantidades positivas.



$$I_x = \int y^2 \cdot dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot b \cdot dy = \boxed{\frac{b \cdot h^3}{12}}$$

$$dA = b \cdot dy$$

$$\boxed{I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}}$$

$$\boxed{I_{BB} = \frac{b \cdot h^3}{3}}$$

Define al Centroide y si pasa por el CG.

El momento de inercia aumenta conforme al eje de referencia se mueve paralelamente alejándose de C. ④

El I de un área compuesta con respecto a un eje, es la suma o resta de los momentos de inercia de sus partes con respecto a ese mismo eje.

RADIO DE GIRO

El radio de giro de un área plana se define

Como

$$\Gamma_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad \Gamma_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad [\text{UN. de longitud}]$$

Se lo considera como la distancia (desde el eje de referencia) a la que toda el área podría concentrarse en un punto y aun tener el mismo momento de inercia que el área original.

TEOREMA DE STAINER

proporciona la relación entre el momento de inercia con respecto a los ejes centroidales y el momento de inercia con respecto a cualquier otro eje.

$$I_x = I_{xc} + Ad_1^2$$

$$I_y = I_{yc} + Ad_2^2$$

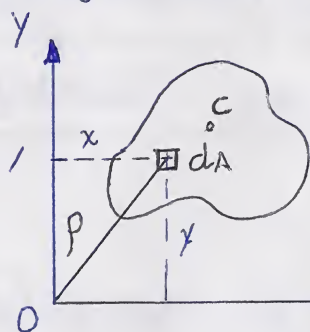
"El momento de inercia de un área con respecto a cualquier eje en su plano es igual al momento de inercia con respecto a un eje central paralelo más el producto del área y el cuadrado de la distancia entre los ejes."

El momento de inercia mínimo se obtiene en un eje que pasa por el Centro de Gravedad.

MOENTOS POLARES DE INERCIA

El momento de inercia con respecto a un eje perpendicular se denomina momento polar de inercia

Se define como $I_p = \int \rho^2 dA$



Por la distancia desde O hasta dA

se obtiene una imp. relación sabiendo que

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

$$I_p = \int \rho^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA = I_x + I_y$$

$$I_p = I_x + I_y$$

El momento polar de inercia con respecto a un eje perpendicular al plano de la figura es igual a la suma de los momentos de inercia con respecto a dos ejes perpendiculares cualesquiera que pasen por ese mismo punto y que se encuentren en el plano de la figura.

TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS PARA MOMENTOS POLARES DE INERCIA,

(5)

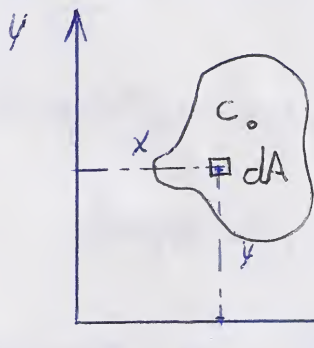
El momento polar de inercia de un área con respecto a cualquier punto O en su plano es igual al momento polar de inercia con respecto al Centroide " C " más el producto del área y el cuadrado de la distancia entre los puntos O y C .

$$(I_P)_O = (I_P)_C + A \cdot d^2$$

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2$$

PRODUCTOS DE INERCIA

Se define con respecto a un conjunto de ejes perpendiculares que se encuentran en el plano del área.



Se lo define como $I_{xy} = \int x \cdot y \cdot dA$.

Cada elemento dif. de dA se multiplica por el producto de sus coordenadas, el PI puede ser entonces POSITIVO, NEGATIVO o CERO

Un Caso especial se presenta cuando uno de los ejes es un eje de simetría del área. El producto de inercia de un área es Cero con respecto a cualquier par de ejes en el cual al menos uno de ellos es un eje de simetría del área.

TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS PARA PRODUCTOS DE INERCIA.

El producto de inercia de un área con respecto a cualquier par de ejes en su plano es igual al producto de inercia con respecto a ejes centroidales paralelos más el producto del área y las coordenadas del Centroide con respecto al par de ejes.

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + A \cdot d_1 \cdot d_2$$

EJES PRINCIPALES

Los valores obtenidos en las ecuaciones de transformación (ecuaciones que muestran como varían los momentos de inercia en función de θ); estos valores se conocen como momentos de inercia principales, y los ejes correspondientes se conocen como ejes principales.

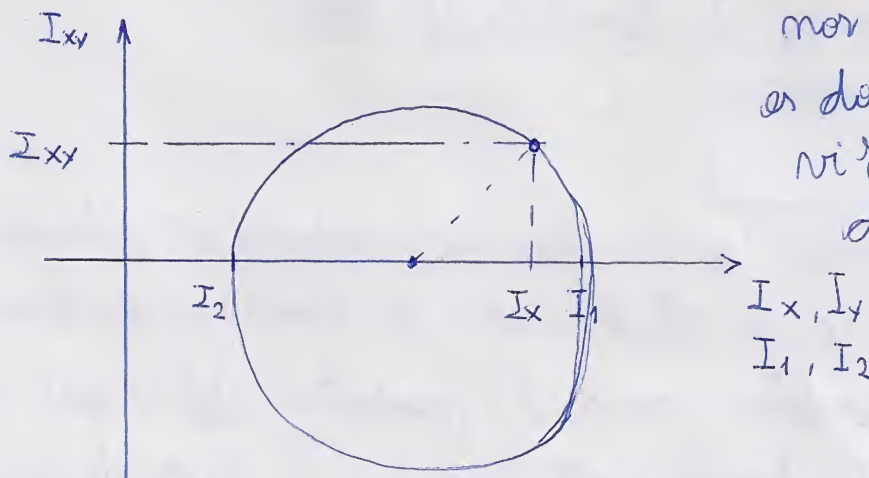
Los ejes principales que pasan por O son un par de ejes ortogonales para los cuales los momentos de inercia son un máximo y un mínimo.

La orientación de los ejes principales está dada por el ángulo θ_p obtenido de las ecuaciones.

El producto de inercia es Cero para los ejes principales.

Un eje de simetría siempre es un eje principal.

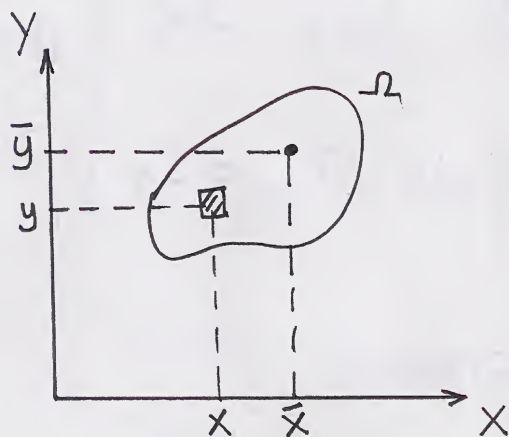
Se puede determinar los máximos y mínimos mediante un método gráfico conocido como el Círculo de MOHR.



son interesantes por que
es donde se flexiona la
viga y que da
desplazamiento en
dos direcciones
 I_1, I_2

UNIDAD 2 : MOMENTOS DE INERCIA

(6)



MOMENTO DE AREA DE ORDEN "n"

$$M_{n,i} = \int_{\Omega} j^n \cdot dA$$

$$\begin{cases} i, j = x, y \\ i \neq j \end{cases}$$

MOMENTO DE ORDEN CERO Respecto a x

$$M_{0,x} = \int_{\Omega} y^0 \cdot dA = \int_{\Omega} dA = A$$

AREA
DE
LA FIGURA

MOMENTO ESTATICO

$$M_{1,x} = \int_{\Omega} y^1 \cdot dA = Q_x = A \cdot \bar{y}$$

$$M_{1,y} = \int_{\Omega} x^1 \cdot dA = Q_y = A \cdot \bar{x}$$

Centroide: Lugar donde tengo que concentrar el area para tener el mismo momento estatico.

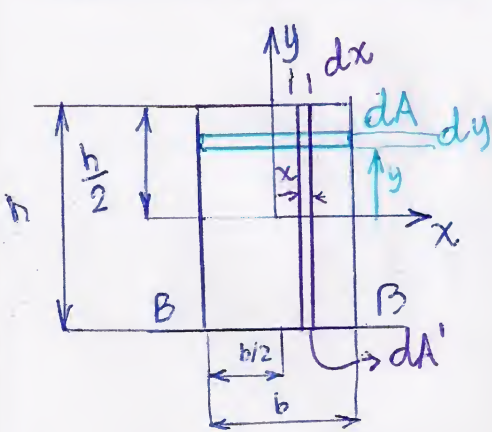
Si pasa por el CG = 0.

El Centroide es un concepto puramente geometrico el cual depende de la forma del sistema.

MOHENTO DE SEGUNDO ORDEN

$$\left. \begin{aligned} M_{2,x} &= \int_{\Omega} y^2 \cdot dA = I_{xx} = I_x \\ M_{2,y} &= \int_{\Omega} x^2 \cdot dA = I_{yy} = I_y \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{MOMENTOS} \\ \text{DE} \\ \text{INERCI} \end{array}$$

MOHENTO DE INERCI DE UN RECTANGULO.



$$\begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^b y^2 dx dy = \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b \cdot dy = b \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \boxed{\frac{b \cdot h^3}{12}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y &= \int_A x^2 \cdot dA' = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^h x^2 dy dx = \left(\left(\frac{h}{2} \right)^3 - \left(-\frac{h}{2} \right)^3 \right) = \frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} = \frac{h^3}{4} \\ &= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 \cdot h \cdot dx = h \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \boxed{\frac{h \cdot b^3}{12}} \end{aligned}$$

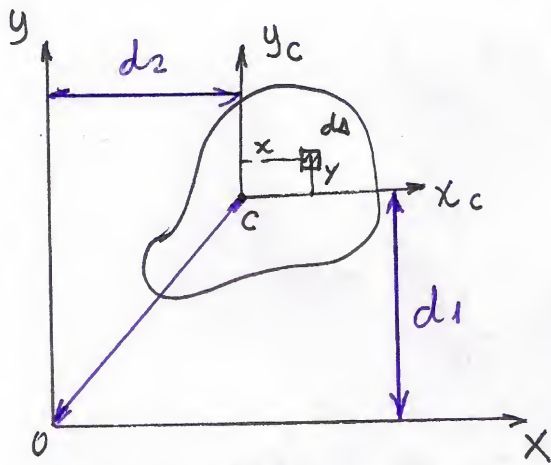
EJE B-B

$$I_{BB} = \int_A y^2 dA = \int_0^h \int_0^b y^2 dx dy = \int_0^h y^2 \cdot b dy = b \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^h$$

$$\boxed{I_{BB} = \frac{b \cdot h^3}{3}}$$

TEOREMA DE STAINER.

7



$$I_x = \int_A (y + d_1)^2 dA \quad \text{Def. MOM INERCIA}$$

$$I_x = \int_A (y^2 + 2y \cdot d_1 + d_1^2) dA$$

$$I_x = \int_A y^2 dA + \int_A 2d_1 y dA + \int_A d_1^2 dA$$

$$I_x = I_{x_c} + 2d_1 \int_A y dA + d_1^2 \int_A dA$$

$\int_A y dA = 0$

$$I_x = I_{x_c} + d_1^2 A$$

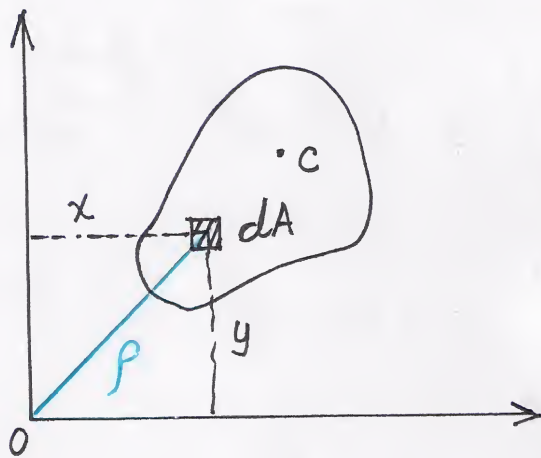
$$I_y = \int_A (x + d_2)^2 dA = \int_A (x^2 + 2x \cdot d_2 + d_2^2) dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA + 2d_2 \int_A x dA + d_2^2 \int_A dA$$

$\int_A x dA = 0$

$$I_y = I_{y_c} + d_2^2 \cdot A$$

MOMENTO DE INERCIA POLAR (I_p)



$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

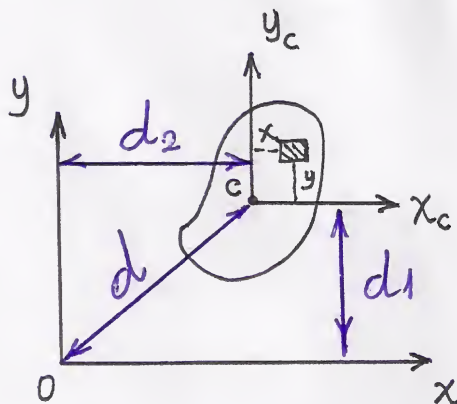
$$I_p = \int \rho^2 dA$$

$$I_p = \int_A \rho^2 dA$$

$$I_p = \int_A (x^2 + y^2) dA =$$

$$I_p = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA$$

$$I_p = I_x + I_y$$



$$(I_p)_O = I_x + I_y$$

$$(I_p)_c = I_{x_c} + I_{y_c}$$

$$I_x = I_{x_c} + d_1^2 A$$

$$I_y = I_{y_c} + d_2^2 A$$

$$I_x + I_y = I_{x_c} + d_1^2 A + I_{y_c} + d_2^2 A$$

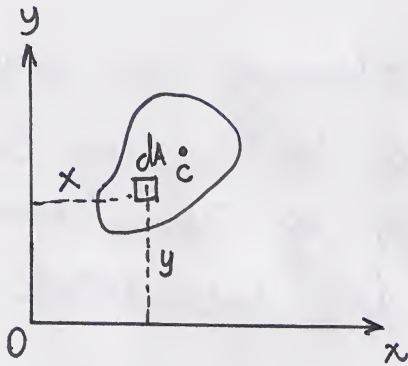
$$d^2 = d_1^2 + d_2^2 \quad I_x + I_y = I_{x_c} + I_{y_c} + A(d_1^2 + d_2^2)$$

$$I_{p_O} = I_{p_c} + A \cdot d^2$$

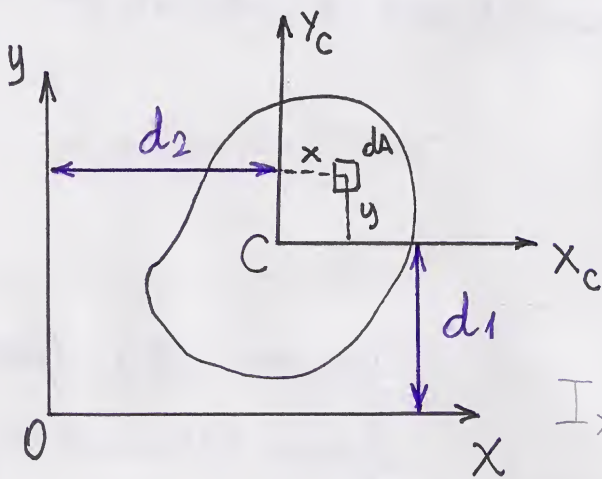
PRODUCTOS DE INERCIA

(8)

$$I_{xy} = \int xy \cdot dA$$



Cada elemento diferencial de area dA se multiplica por el producto de sus coordenadas. (pueden ser positivos, negativos o Cero).



$$I_{xy} = \int (x + d_2)(y + d_1) dA$$

$$I_{xy} = \int (xy + x \cdot d_1 + d_2 \cdot y + d_1 d_2) dA$$

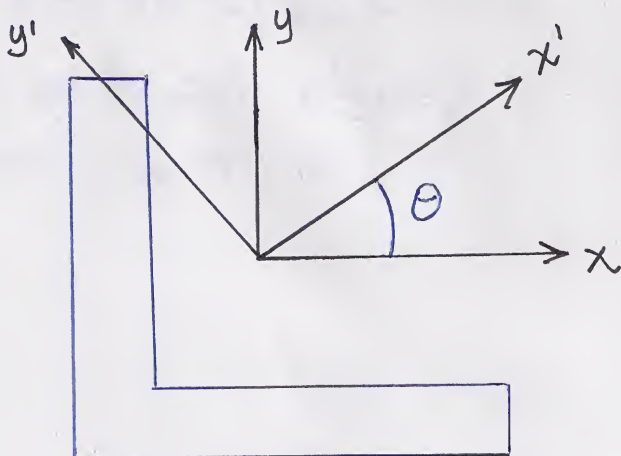
$$I_{xy} = \int xy dA + \int x d_1 dA + \int y d_2 dA + \int d_1 d_2 dA$$

$= 0 \quad \quad = 0$

$$I_{xy} = I_{x_c y_c} + d_1 d_2 \cdot A$$

MOMENTO
ESTATICO
CON RESP. A
CG

ROTACIÓN DE EJES



$$\left\{ \begin{array}{l} I_x \neq I_{x'} \\ I_y \neq I_{y'} \\ I_{xy} \neq I_{x'y'} \rightarrow \exists \text{ un } \theta \text{ en el} \\ \text{Cual es } 0 // \end{array} \right.$$

Se denomina dirección principal de inercia a

$$(x', y') / I_{x'y'} = 0 \text{ con } I_x, I_y \text{ MAXIMOS Y MINIMOS}$$

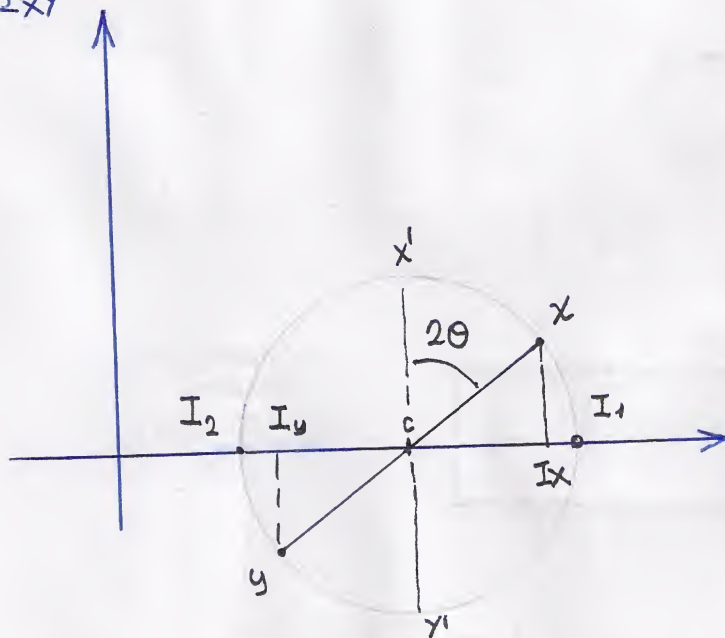
$(I_1 \text{ e } I_2)$.

DIRECCION PRINCIPAL DE INERCIA: nos interesan por que es donde se flexiona la viga y queda desacoplada en dos direcciones

PARA CALCULAR MAXIMOS Y MINIMOS SE USA EL CIRCULO DE MOHR DE INERCIA

DATOS = I_{xy}, I_x, I_y

I_{xy}



PASOS

1) MARCO 1 Pto = Coord (I_x, I_{xy})

2) MARCO 2 Pto = Coord $(I_y, -I_{xy})$

3) Los uno y marca el Centro y traza el Círculo

4) Los puntos dde el Círculo toca al eje X, son los max y minimos

Las barras cargadas axialmente sufren alargamientos con esfuerzos de tracción y acortamientos con esfuerzos de compresión.

BARRA PRISMÁTICA: es un elemento estructural que posee un eje longitudinal recto y una sección transversal constante en toda su longitud.

HIPÓTESIS

En esta teoría se toma que la carga "P" se aplica en el Centróide de la sección transversal externa. También se supone que el material es linealmente elástico. (OBEDECE LA LEY DE HOOKE).

$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$$

Ecuación para el alargamiento de la barra. El alargamiento es directamente proporcional a la carga P y a la longitud L e inversamente proporcional al módulo E y al área de la sección transversal A .

$E \cdot A$ se lo conoce como RIGIDEZ AXIAL de la barra.

La ecuación sirve para la tracción y también para la compresión, en ese caso último el " δ " representa el ACORTAMIENTO.

El cambio en la longitud de la barra por lo general es muy pequeño en comparación a su longitud. (especial cuando se trata de acero o aluminio; materiales estructurales).

RIGIDEZ: es la fuerza necesaria para producir un alargamiento unitario ($\delta P/\delta$).

$$K = \frac{E \cdot A}{L}$$

Es entonces la carga que necesita para que la deformación sea igual a 1.
"Es la carga por unidad de deformación"

FLEXIBILIDAD: alargamiento debido a una carga unitaria.

$$f = \frac{L}{E \cdot A}$$

Es la deformación necesaria para que la carga sea 1.

"Es la deformación por unidad de carga".

AXIAL NO UNIFORME

Cuando existen cargas axiales intermedias se puede determinar el cambio de longitud de esta barra sumando algebraicamente los alargamientos y acortamientos de los segmentos individuales.

Este mismo enfoque general se puede emplear cuando la barra se compone de varios segmentos prismáticos, cada uno con fuerzas axiales distintas, diámetros y materiales diferentes.

$$\delta \Sigma = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \rightarrow \text{Barras uniformes con carga intermedia}$$

$$\delta = \sum \frac{N_i \cdot L_i}{E_i A_i}$$

se aplica solo en materiales linealmente elásticos

EFFECTOS TERMICOS

Los cambios en la temperatura producen dilatación o contracción de los materiales estructurales.

Resulta en deformaciones térmicas y esfuerzos térmicos.

Por ejemplo la dilatación de un metal frente al aumento de la temperatura.

$$\epsilon_T = \alpha (\Delta T)$$

$$\epsilon_T = \frac{\delta_T}{L}$$

α es el Cof de dilatación termica
 $\alpha [1/^{\circ}\text{C} \text{ o } 1/^{\circ}\text{K}]$

la Convención de signos usual es que las dilataciones son positivas y las Contracciones son negativas.

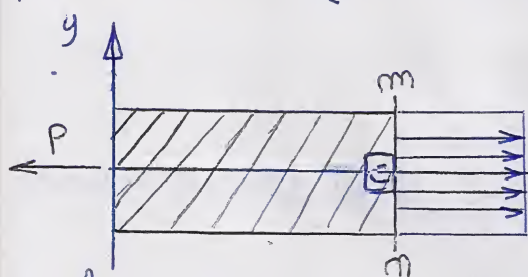
$$\boxed{\delta_T = \epsilon_T \cdot L = \alpha \cdot (\Delta T) \cdot L}$$
 es una relación temperatura Desplazamiento.

Analogía a las relaciones de fuerza desplazamiento.

ESFUERZOS SOBRE SECCIONES INCLINADAS

se tiene una barra P , linealmente elastica sometida a un esfuerzo de tracción

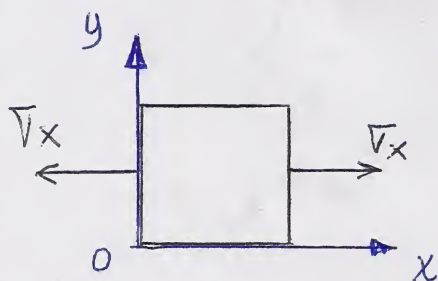
Si cortamos la barra en una sección transversal, por un plano $m-m$ (PERPA X)



los esfuerzos normales se calculan usando $\tau_x = \frac{P}{A}$ Siempre que la distribución del esfuerzo sea uniforme

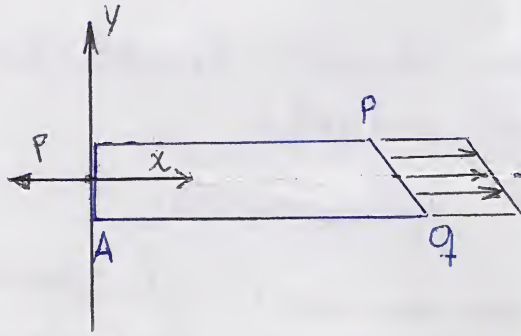
sobre el area de la sección transversal A . (si la barra es prismática, el material es homogéneo y la fuerza axial P actúa en el Centroide del area de la sección transversal, esto alejado de cualquier Concentración de esfuerzos).

se suele hacer mas comodo la representación mediante un trozo de material "C", para representar los esfuerzos en sus caras. se denomina ELEMENTO DE ESFUERZO.



Lo mostrado anteriormente solo ofrece una vista limitada de los esfuerzos en una barra cargada axialmente.

Es necesaria una investigación completa, necesitamos ver los esfuerzos en secciones inclinadas.



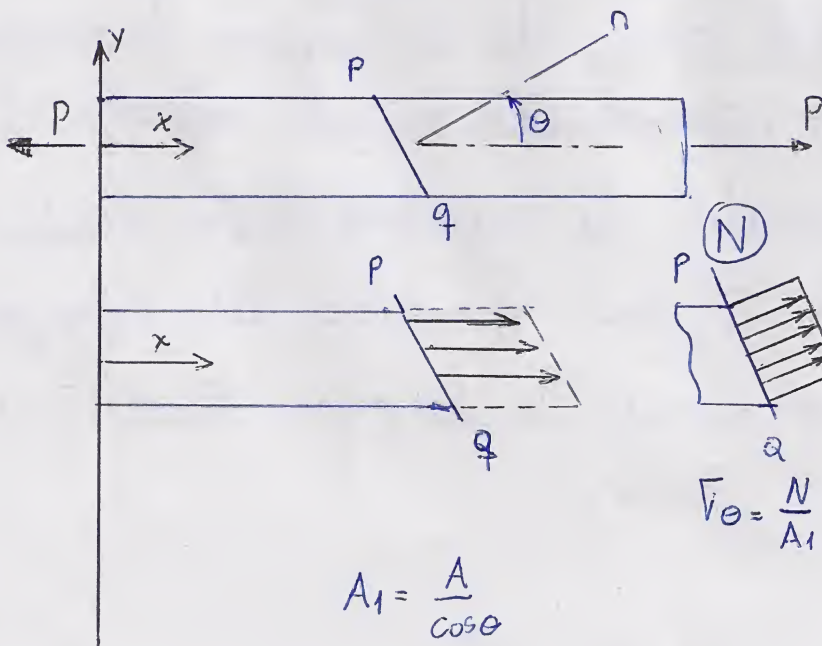
Se debe especificar el ángulo θ entre x y la normal "n" de la sección.

La resultante de los esfuerzos es una fuerza P en la dirección x . Posee dos componentes, una NORMAL " N " y una CORTANTE " V ".

$$N = P \cdot \cos \theta \quad V = P \cdot \sin \theta$$

Se tienen esfuerzos normales y de corte distribuidos de manera uniforme sobre la sección inclinada.

$$\bar{v} = \frac{N}{A_1} ; \tau = \frac{V}{A_1} ; A_1 = \frac{A}{\cos \theta}$$



$$A_1 = \frac{A}{\cos \theta}$$

$$\bar{v}_\theta = \frac{N}{A_1}$$

$$\tau_\theta = \frac{V}{A_1}$$

Se utiliza el subíndice θ para indicar los esfuerzos que actúan sobre una sección inclinada a un ángulo θ .

τ_{θ} es positivo en tracción, τ_{θ} es positivo cuando quiere producir una rotación en sentido antihorario.

Se deduce por estática que:

$$\begin{aligned}\tau_{\theta} &= \tau_x \cdot \cos^2 \theta = \frac{\tau_x}{2} (1 + \cos 2\theta) \\ \tau_{\theta} &= -\tau_x \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta = -\frac{\tau_x}{2} (\sin 2\theta)\end{aligned}$$

son independientes del material, son validos para cualquier material, ya sea que se comporte lineal o no linealmente, elástico o inelásticamente.

ESFUERZOS NORMALES Y
CORTANTES MÁXIMOS

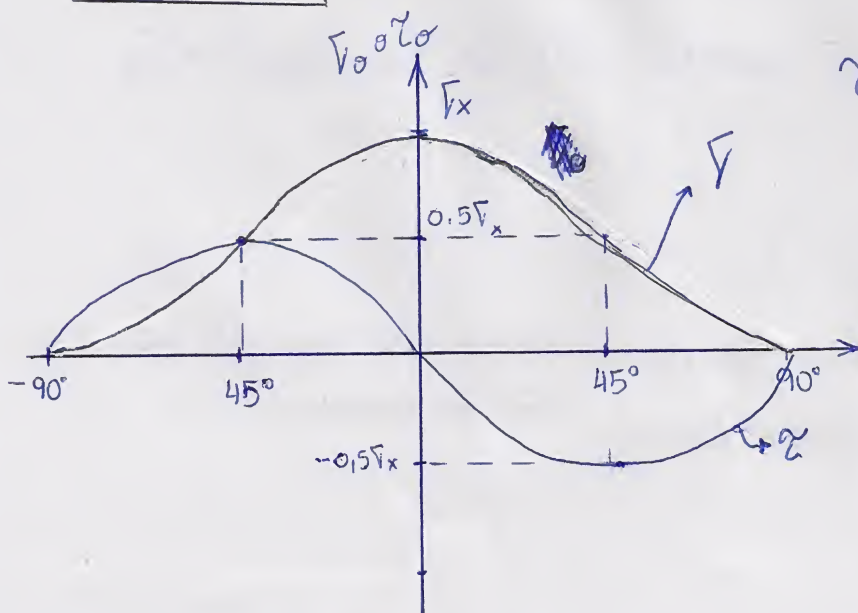
El esfuerzo normal es máximo

Cuando $\theta = 0$ y es $\tau_{\text{MAX}} = \tau_x$.

Cuando $\theta = \pm 45^\circ$, el N es la mitad del valor máximo. τ_{θ} es igual a 0 en $\theta = 0^\circ$ (y en $\theta = \pm 90^\circ$). es positivo con $\theta = -45$ y negativo

$$\tau_{\text{MAX}} = \frac{\tau_x}{2}$$

Con $\theta = 45^\circ$



$$\tau_{\text{MAX}} @ 45^\circ = 0$$

$$\tau = 0^\circ \Rightarrow \theta = 0^\circ$$

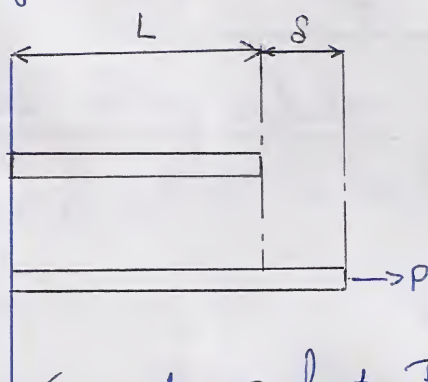
$$\tau_{\text{MAX}} = \frac{\tau_x}{2}$$

ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

es un concepto fundamental en la mecánica aplicada, sus principios se usan ampliamente para determinar la respuesta de máquinas estructurales sometidos a cargas estáticas y dinámicas.

Se considera nuevamente una barra prismática, con longitud L sometida a una fuerza de tensión P ; la carga se aplica lentamente (Proceso de carga estática); no hay efectos dinámicos o inerciales, debido a movimientos

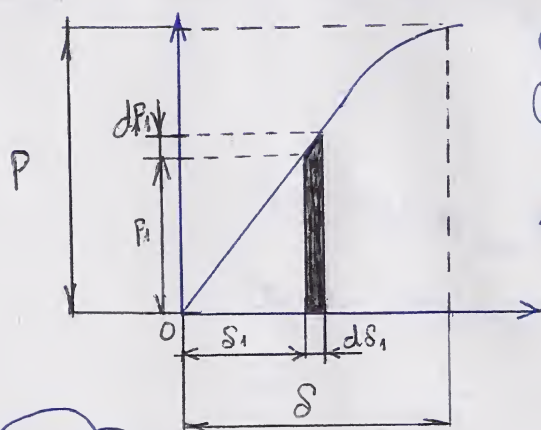
$$TE = U_{\text{Ext. Pot}}$$



La carga P realiza una cierta cantidad de trabajo. El trabajo es igual al producto de la fuerza por la distancia, sin embargo, la

fuerza varía de 0 hasta P ; debemos conocer cómo varía la fuerza para poder calcular el trabajo. La información me

la proporciona el DIAGRAMA DE CARGA-DESPLAZAMIENTO



- ① P_1 es un valor entre 0 y P
 - ② S_1 es el desplazamiento correspondiente
- si aumenta dP_1 lo hará igual dS_1

$$W = \int_0^S P_1 \cdot dS_1$$

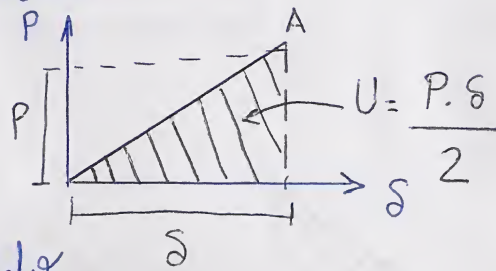
El trabajo realizado por la carga es igual al área debajo de la curva CARGA-DESPLAZAMIENTO.

La energía de deformación; es la energía absorbida por (12) la barra durante el proceso de cargas. La energía de deformación es igual al trabajo realizado por la carga (PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA)

$$U = W = \int_0^{\delta} P_1 \cdot dS_1 \quad [J]$$

Suponga que el material sigue la ley de HOOKE, la Curva Carga desplazamiento es una recta.

$$U = W = \frac{P \cdot \delta}{2}$$



el área del triángulo sombreado

Se sabe que $\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$; con esta expresión y la anterior

simplemente igualo y despejo U.

$$U = \frac{P^2 \cdot L}{2 \cdot E \cdot A}$$

$$U = \frac{E \cdot A \cdot \delta^2}{2L}$$

↳ energía en función del alargamiento.

↳ energía de def. en función de la carga

• No vale el principio de superposición, El efecto de las cargas actuando juntas no es igual a la suma de los efectos.

DENSIDAD DE ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

de material

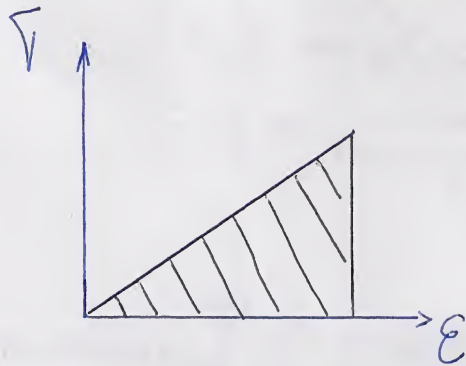
Se define como la energía de deformación por unidad de volumen

$$\mu = \frac{U}{A \cdot L}$$

$$\mu = \frac{U}{A \cdot L} = \frac{1}{2} P \cdot \delta \cdot \frac{1}{A \cdot L} = \frac{1}{2} \frac{P}{A} \cdot \frac{\delta}{L}$$

$$\left[\frac{J}{m^3} \right]$$

$$\mu = \frac{1}{2} \tau \cdot \epsilon$$

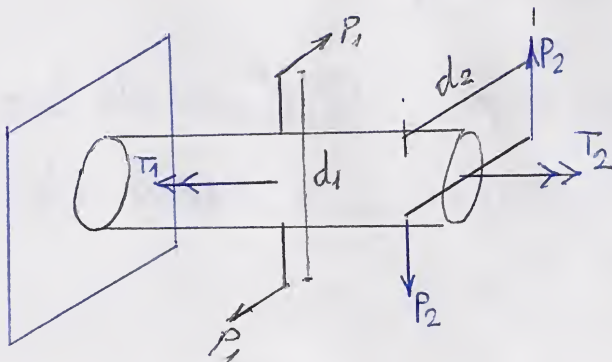


Igual al área del triángulo de base ϵ y altura τ .

UNIDAD IV

TORSIÓN

Es un esfuerzo producido por momentos o pares de torsión aplicados sobre una barra y que tienden a producir la rotación de las secciones transversales de la misma respecto a su eje longitudinal.



T_1 y T_2 son los PARES DE TORSIÓN

$$T_i = P_i \cdot d_i$$

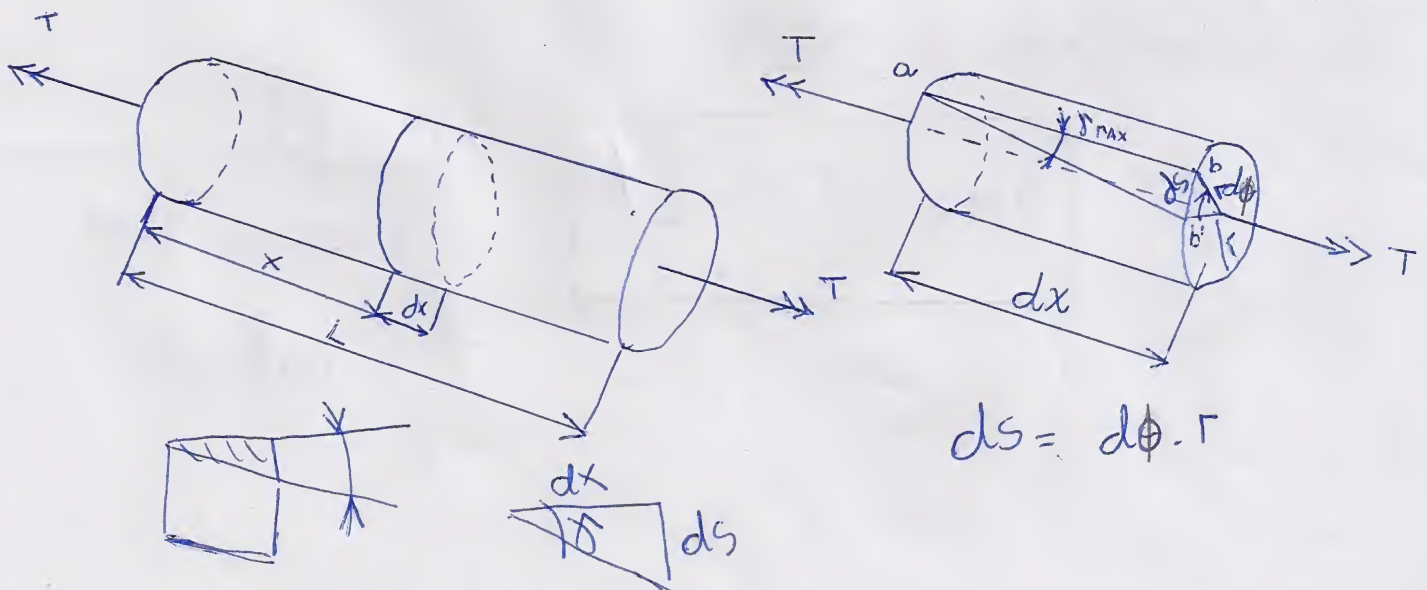
$$\tau [lb \cdot ft; lb \cdot in; N \cdot m]$$

El estudio comienza al Considerar una barra en (13) ^(PRISMAT) con sección transversal circular torcida por pares T que actúan en sus extremos. Cada sección transversal de la barra es idéntica, cada sección transversal se somete al mismo par de torsión interno T . Se dice que esta en torsión Pura.

• Las secciones transversales permanecen planas y circulares y todos los radios rectos. Si el ángulo de rotación entre un extremo de la barra y el otro es pequeño, no cambian la longitud de la barra ni sus radios. (RELACIÓN CINEMÁTICA):

La hipótesis entonces para una barra circular sometida a torsión es que esta permanece constante con su forma y longitud original, y sus secciones transversales planas (Para pequeños ángulos de rotación).

DEFORMACIÓN UNITARIA POR CORTANTE



$$\gamma_{MAX} = \frac{b \cdot b'}{ab}$$

magnitud de la deformación por
Cortante en la superficie de la barra.

γ_{MAX} se mide en radianes.

Siendo r el radio de la barra se puede expresar
a bb' como $r \cdot d\phi$, donde $d\phi$ esta en rad.

$$\gamma_{MAX} = \frac{r \cdot d\phi}{dx}$$

↑
DEF. POR
CORTE

Siendo $\theta = \frac{d\phi}{dx}$ la razón de
cambio del ángulo de torsión

ϕ con respecto a la distancia x medida a lo largo
del eje de la barra. θ sera conocida como RAZÓN DE
TORSIÓN O ANG. DE TORSIÓN POR UNIDAD DE LONGITUD.

$$\gamma_{MAX} = \frac{r \cdot d\phi}{dx} = r \cdot \theta$$

Se considera por conveniencia una barra sujeta a
torsión pura.

En torsión pura es valido

$$\gamma_{MAX} = r \cdot \theta = \frac{r \cdot \phi}{L}$$

para fibra.
Interior, uno
P. exterior.

DEFORMACIÓN UNITARIA POR V DENTRO DE LA BARRA

Se puede utilizar el mismo método (14) que se usó para encontrar γ_{MAX} en la

superficie.

Siendo ρ el radio interior; los radios de las secciones transversales permanecen rectos y sin distorsión durante la torsión.

Los elementos interiores también están en cortante puro con las deformaciones unitarias por cortante correspondientes dados por la ecuación $\gamma = \rho \cdot \theta$

$$\gamma = \rho \cdot \theta = \frac{\rho}{r_{MAX}} \cdot \gamma_{MAX}$$

$$\gamma_{MAX} = r \cdot \theta$$

$$\gamma = \rho \cdot \theta \Rightarrow \gamma = \frac{\rho}{r} \cdot \gamma_{MAX}$$

Las deformaciones unitarias por cortante en una barra circular varían linealmente con la distancia radial ρ desde el centro y alcanzan su máximo con γ_{MAX} en la superficie exterior.

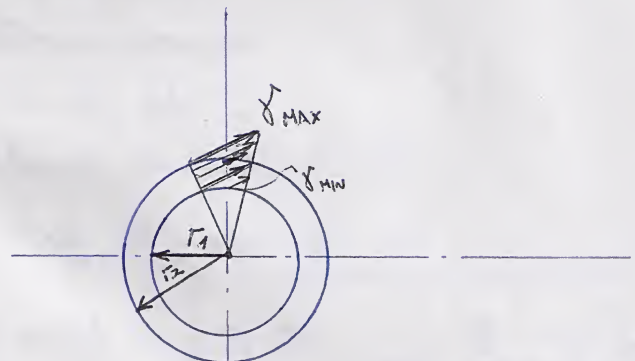
TUBO CIRCULAR

Las ecuaciones vistas o descriptas antes se pueden aplicar a los tubos circulares.

En este caso existirá un γ_{MAX} y un γ_{MIN}

$$\gamma_{MAX} = \frac{T_2 \cdot \phi}{L}$$

$$\gamma_{MIN} = \frac{T_1}{T_2} \cdot \gamma_{MAX} = \frac{T_1 \cdot \phi}{L}$$



Las ecuaciones están limitadas a ángulos de torsión pequeños.

BARRAS
CIRCULARES
DE MAT. LIN
ELASTICOS

Se emplea la Ley de Hooke en Cortante

$$\tau = G \cdot \gamma \rightarrow \text{DEF. UNITARIA POR CORTANTE. EN RADIANES.}$$

L → MOD DE ELASTICIDAD TRANSVERSAL

$$\tau_{\text{MAX}} = G \cdot r \cdot \theta$$

$$\tau = G \cdot \rho \cdot \theta = \frac{\rho}{r} \cdot \tau_{\text{MAX}}$$

las ecuaciones se obtienen combinando la ley de Hooke con las ecuaciones para deformaciones unitarias.

FORMULA DE TORSION Muestra la relación entre los esfuerzos cortantes y el par de torsión T.

TUBOS BARRAS → $\tau_{\text{MAX}} = \frac{T \cdot r}{I_p}$ esta ecuación muestra que el esfuerzo de corte máximo es proporcional al par de torsión aplicado. T es inversamente proporcional al momento polar de inercia I_p .

$$T \text{ [N.m] [lb-ft] [lb-in]}$$

$$\text{Si } r = \frac{d}{2} \text{ ; } I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

$$I_p \text{ [m}^4\text{] [in}^4\text{]}$$

Con estas dos ultimas se obtiene

$$\tau \text{ [Pa] [PSI]}$$

$$\tau_{\text{MAX}} = \frac{16 T}{\pi \cdot d^3}$$

El esfuerzo de corte es inversamente prop. al cubo del diametro.

Solo aplica a barras con sección circular transversal

Si DUPLICO el diametro, el esfuerzo se reduce en factor de 8.

$$\tau = \frac{\rho}{r} \cdot \tau_{\text{MAX}} = \frac{T \cdot \rho}{I_p}$$

es una formula generalizada de torsión y de nuevo se observan que los esf. cortantes varían linealmente con la distancia radial desde el centro a la barra.

TUBO CIRCULAR Para reducir peso y ahorrar material (ejes) (15)

El análisis de la torsión es similar al de una barra sólida. El radio ρ está entre $[r_1; r_2]$ y el

$$I_p = \frac{\pi}{32} (d_2^4 - d_1^4)$$

Resisten mejor la torsión que las barras sólidas.

LIMITACIONES Se limitan a barras de sección circular, que se comportan de manera linealmente elástica.

Además las barras son sólidas, si están alejadas de concentraciones de esfuerzos! (cambio en su geometría de forma abrupta). y alejadas de los secc. transversales donde se aplican cargas.

NO se pueden utilizar las ecuaciones en barras con otras formas.

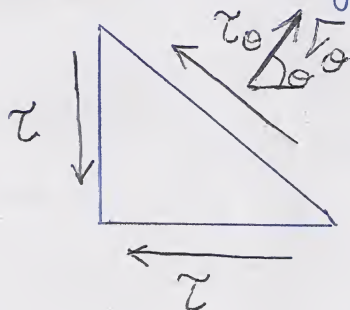
ESFUERZOS Y DEF. UNITARIAS EN CORTANTE PURO

Cuando una barra es sometida a torsión, actúan esfuerzos

cortantes sobre las secciones transversales y los planos longitudinales.

ESFUERZOS SOBRE PLANOS INCLINADOS. (τ_θ y τ_ϕ)

τ_θ es positivo en tracción y τ_ϕ es positivo cuando tienden a producir rotación del material en sentido contrario a las manecillas del reloj.



Las caras horizontal y vertical tienen τ positivos y la anterior y posterior están libres de esfuerzos.

$$\tau_{\theta} = 2 \tau \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta$$

ANGULO DE TORSIÓN ϕ

$$T = G \cdot \theta \cdot I_p \quad \text{como } \theta = \frac{\gamma}{\rho}, \quad T = G \cdot \frac{\gamma}{\rho} \cdot I_p$$

$$\text{Con } \phi = \theta \cdot L$$

Se mide en RADIANES

$$\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot I_p}$$

Angulo de rot. producido por un par de torsión unitario.

FLEXIBILIDAD TORSIONAL

TORSIÓN NO UNIFORME

Muy similar a axial

El Angulo de torsión $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n$

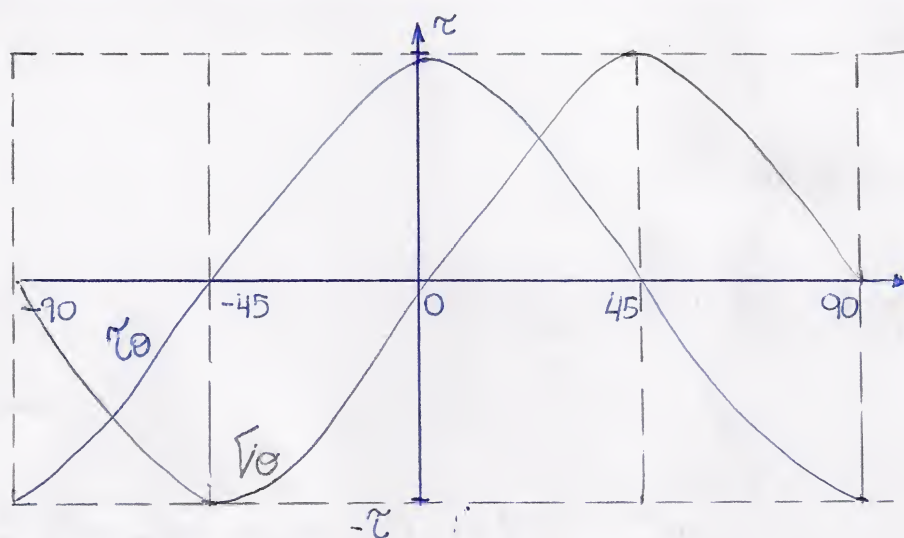
$$\phi = \sum \phi_i = \sum \frac{T_i L_i}{G_i (I_p)_i}$$

$$\gamma = \frac{T \rho}{G \cdot I_p}$$

$$\frac{G \cdot I_p}{L}$$

RIGIDEZ TORSIONAL

Angulo por de torsión necesario para producir rotación de un Angulo unitario.



$$\sigma_{\theta} = \tau \sin 2\theta$$

$$\tau_{\theta} = \tau \cos 2\theta$$

para $\theta = 0 \rightarrow \sigma_{\theta} = 0$ y $\tau_{\theta} = \tau$

↳ Contrario al sentido horario

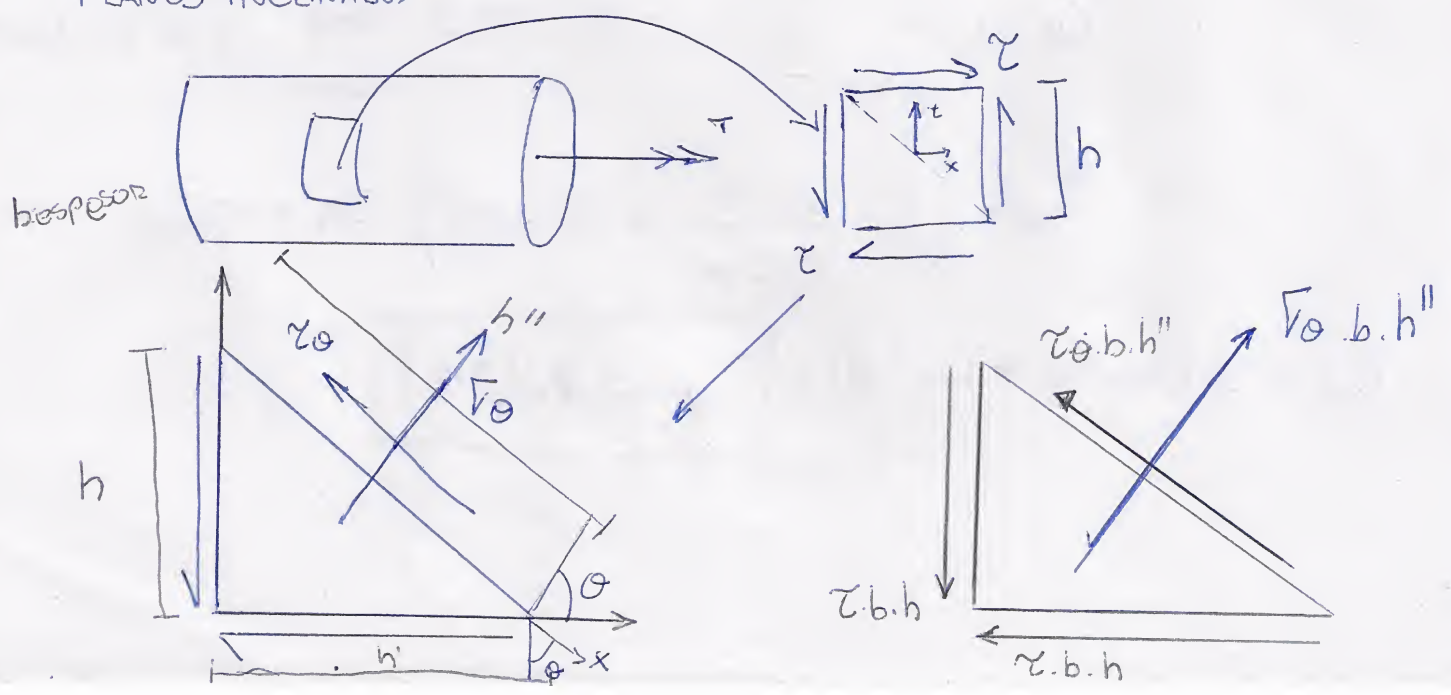
para $\theta = 90^\circ \rightarrow \sigma_{\theta} = 0$ y $\tau_{\theta} = -\tau$

↳ HORARIO

Los esfuerzos ^{cutantes} mayores ocurren en $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 90^\circ$

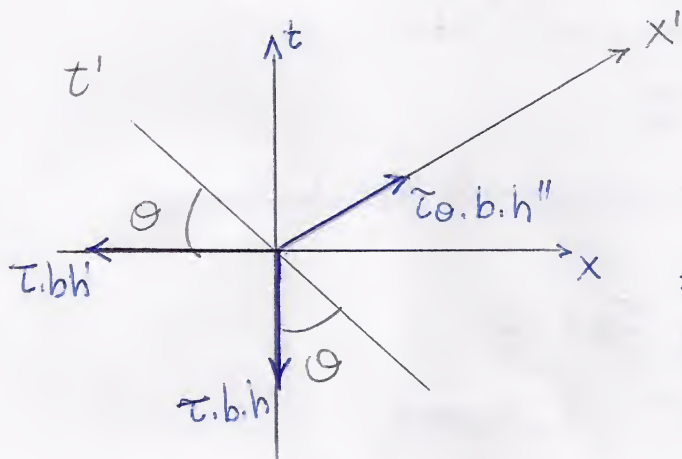
Los esfuerzos normales σ_{θ} alcanza un máximo en $\theta = 45^\circ$. Tracción y Compresión iguales, sin corte.

ESFUERZOS SOBRE PLANOS INCLINADOS



POR TRIGONOMETRÍA

$$= \begin{cases} h'' = h / \cos \theta \\ h' = h \cdot \tan \theta \end{cases}$$



$$\Sigma F_{x'} = 0 \Rightarrow T_0 \cdot b \cdot h'' - \tau \cdot b \cdot h \cdot \tan \theta - \tau \cdot b \cdot h' \cdot \cos \theta = 0$$

$$= T_0 \cdot b \cdot \frac{h}{\cos \theta} - \tau \cdot b \cdot h \cdot \tan \theta - \tau \cdot b \cdot h \cdot \cos \theta \cdot \tan \theta$$

$$= T_0 = (\tau \cdot \tan \theta + \tau \cdot \tan \theta) \cdot \cos \theta$$

$$T_0 = \tau \cdot \tan 2\theta$$

$$T_0 = 2 \tau \cdot \tan \theta \cdot \cos \theta$$

$$\Sigma F_{y'} = 0 \Rightarrow T_0 \cdot b \cdot h'' - \tau \cdot b \cdot h' \cdot \tan \theta - \tau \cdot b \cdot h \cdot \cos \theta$$

$$T_0 \cdot b \cdot \frac{h}{\cos \theta} - \tau \cdot b \cdot h \cdot \tan \theta \cdot \frac{\tan \theta}{\cos \theta} - \tau \cdot b \cdot h \cdot \cos \theta$$

$$T_0 = \left(\tau \cdot \frac{\tan^2 \theta}{\cos \theta} + \tau \cdot \cos \theta \right)$$

$$T_0 = \tau \cdot (\tan^2 \theta + \cos^2 \theta) = T_0 = 2 \cos(2\theta)$$

RELACIÓN E y G

(17)

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\frac{E}{3} \ll G \ll \frac{E}{2}$$

E y G no son propiedades independientes de un material linealmente elástico.

TRANSMISIÓN DE POTENCIA

El principal uso de los ejes es para transmitir potencia mecánica de un dispositivo o máquina a otra. (Como el eje impulsor de un auto). Se transmite mediante el movimiento rotatorio del eje. y la cantidad de potencia transmitida dependen de la magnitud del par de torsión y de la velocidad de rotación.

$$P = \underbrace{2\pi \cdot f}_{\frac{\text{rad}}{\text{seg}} \text{ o } G} \cdot \underbrace{T}_{\text{N m}}$$

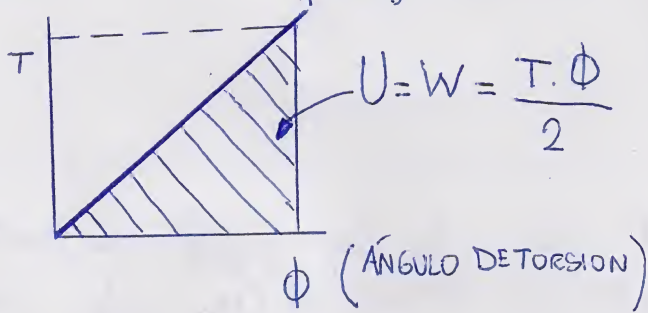
$$\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{s}} = W$$

EID | Reutilizamos los mismos conceptos básicos que en axial.

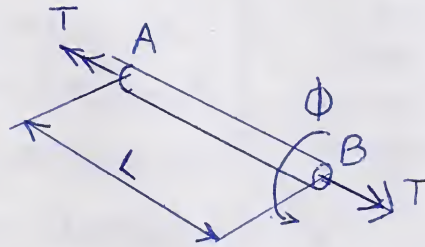
La barra se encuentra bajo TORSION PURA. ante un T. Def. elásticos y proceso de carga estáticos.

↳ SIGUE HOOKE (la relación es lineal entre T y el ángulo de torsión es lineal.)

PAR DE TORSIÓN



• Se limita a pequeños ángulos de TORSIÓN.



$$\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot I_p} \Rightarrow U = \frac{T^2 \cdot L}{2 \cdot G \cdot I_p}$$

Limitaciones: las ecuaciones deducidas de esta sección solo se aplican a barras de materiales linealmente elásticos. Con áng. de torsión pequeños.

La energía no se puede obtener sumando las energías de deformación obtenidas para los Cargos individuales, que actúan por separado (NO VALE PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN)

DENSIDAD DE ENERGÍA

$$S = \gamma \cdot h \quad (\text{mat. lin. elástico})$$

$$W = U \cdot \frac{V \cdot S}{2} \quad V = \gamma \cdot h \cdot t$$

$$U = \frac{\gamma \cdot h^2 \cdot t \cdot \gamma}{2}$$

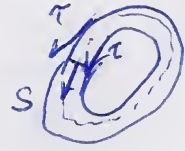
$$u = \frac{U}{V_0} = \frac{1}{2} \gamma \cdot \gamma = \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{G}$$

$$\Downarrow u / h^2 \cdot t = \frac{\cancel{\gamma \cdot h^2} \cdot \cancel{t} \cdot \gamma}{2 \cdot \cancel{h^2} \cdot \cancel{t}} = \frac{\gamma^2}{2G} = \frac{G \gamma^2}{2} = \frac{\gamma \cdot \gamma}{2}$$

TUBOS DE PARED DELGADA (TEORIA DE BREDTH)

18

• Se usa para tubos de pared delgada unicelulares.



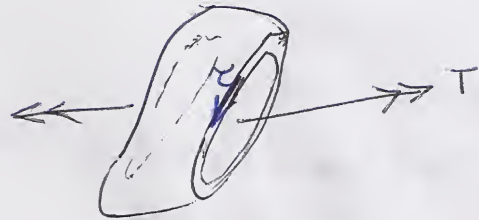
• Deben ser de secciones circulares.

• Se le aplica a una Barra prismática, de sección delgada (pared) o que su espesor varía suavemente.

BREDHT \rightarrow 1ª Suposición: Los τ serán paralelos y tangentes a la fibra media.
 \rightarrow 2ª Suposición: Son todos iguales en magnitud.

Se conoce al producto de τ por el espesor t (mismo en cada punto) como flujo cortante.

$$f = \tau \cdot t = cte$$



El esfuerzo de corte máxima ocurre donde el espesor del tubo es menor, y viceversa. En regiones donde hay espesor constante el esfuerzo cortante es cte.

FORMULA DE TORSIÓN

$$\tau = \frac{T}{2 \cdot t \cdot A_m}$$

\rightarrow Par de torsión.



\rightarrow PROP. DE LA SECCIÓN

A_m es el area encerrada por la linea media

ANGULO DE TORSIÓN (Φ)

$$\Phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J}$$

L

RIGIDEZ
TORSIONAL

"J" se conoce como Constante de torsión.

$$J = \frac{4 \cdot A_m^2}{\int_0^{L_m} \frac{ds}{t}}$$

Se obtiene de la expresión de energía de deformación

$$U = \frac{T^2 \cdot L}{8 G A_m^2} \int_0^{L_m} \frac{ds}{t}$$

LIMITACIONES:

- Se aplica a elementos PRISMATICOS con formas tubulares, cerrados.

Si o si pared CERRADA.

- algunos formularios están restringidos a que el material sea linealmente elástico. (excepto en la de flujo).

- Los resultados pierden precisión a medida que t aumenta.
- Probabilidad de pandeo creciente mientras mas largo sea y mas pared delgada tenga. (aquí se supone que se evita el pandeo).

FLEXIÓN

SIMPLE \rightarrow SIN AXIAL.

UNIDAD I

(19)

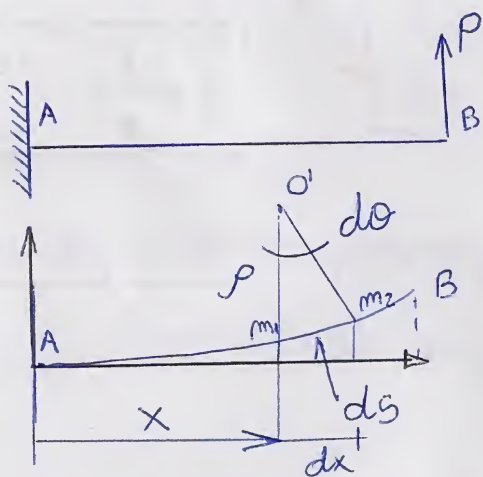
\hookrightarrow Flexión PURA: flexión ante un momento flectante constante; ocurre solo en regiones de una viga donde la fuerza cortante es 0.

Se considera.

- VIGA PRISMÁTICA (secc. cte y eje recto)
- Sección simétrica
- $P \parallel Y$ y $M \parallel Z$
- bajo flexión pura
- SIMPLE; NO HAY AXIAL.

- $M_f(x) = cte$
- $Q_{xy} = 0$
- $N(x) = 0$
- PLANAS
- MAT. HOMOGÉNEOS

Las deformaciones adoptan forma curva; las deformaciones y los esfuerzos están relacionados con la curvatura.



$$P \, d\theta = ds$$

$$\rho = \frac{ds}{d\theta}$$

\rightarrow Curva de deflexión ($V(x)$)

O' es el Centro de la Curvatura; m_1 y m_2 dos puntos de la Curva de deflexión. ρ es el radio de Curvatura y la Curvatura es K_c

$$K_c = \frac{1}{\rho}$$

La Curvatura es una medida de que tan rápidamente está flexionada la viga.

de el triángulo $O'm_1m_2$ saca

$$\rho \cdot d\theta = ds$$

$$\boxed{\kappa_c = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}}$$

es válida para cualquier Curva, si es cte en toda la longitud de una Curva, también es un cte Curva será un

el radio de Curvatura y arco de círculo.

DEFLEXIONES

→ suelen ser pequeños en Comp. a su longitud.

↓
Curva casi plana

→ CON
DEFLEXIONES
PEQUEÑAS

$$\boxed{\kappa_c = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}}$$

$$ds \approx dx$$

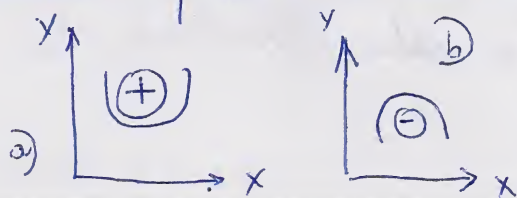
$$\boxed{\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}}$$

Las secciones que antes de la deformación son planas y perpendiculares respecto a su eje (eje de la viga) permanecen así luego de la deformación.

FUNDAMENTAL (es análoga a la NO DEFORMACION de secc. transversales en torsión).

Las curvas PERMANECEN PLANAS Y NORMALES AL EJE

La Curvatura posee una CONVENCIÓN de signos para la Curvatura



DEFORMACIONES QUE OCURREN

$$(\epsilon \text{ y } \gamma)^x$$

20

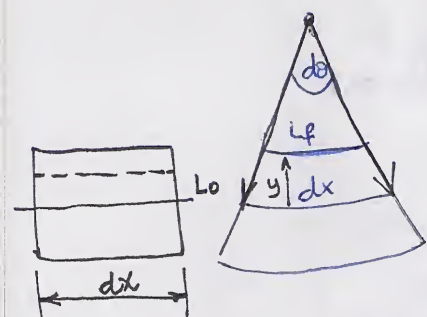
Las secciones transversales permanecen planas y normales al eje longitudinal. (fundamental).

Las secc transversales giran respecto de si mismos alrededor de ejes perpendiculares al plano de flexión.

Los fibras longitudinales en la parte inferior sufren alargamientos y los superiores acortamientos.

(TRACCIÓN Y COMPRESIÓN).

Existe algun punto entre la parte superior e inferior de la viga donde permanece inalterado. (NO sufl def.). La superficie se denomina SUPERFICIE NEUTRA (



$$dx = L_0 = \rho \cdot d\theta$$

$$L_f = (\rho - y) \cdot d\theta$$

$$\epsilon = \frac{L_f - L_0}{L_0}$$

La Curvatura es una función de x, depende de esta; es Cte para cada secc.

$$\epsilon = \frac{(\rho - y)d\theta - \rho \cdot d\theta}{dx}$$

$$\epsilon = \frac{\cancel{\rho \cdot d\theta} - y \cdot d\theta - \cancel{\rho \cdot d\theta}}{dx}$$

$$\epsilon = -y \cdot \frac{d\theta}{dx} \Rightarrow$$

$$\boxed{\epsilon = -y \cdot K_c}$$

↓
dist. al eje neutro de la fibra

La deformación en una viga en flexión pura varía linealmente con la dist al eje neutro.

Def. long. relación con curvatura

Por Ley de Hooke

$$\sigma_x = E \cdot \epsilon \Rightarrow \sigma_x = -E \cdot y \cdot \kappa$$

RELACIÓN
CONSTITUTIVA:

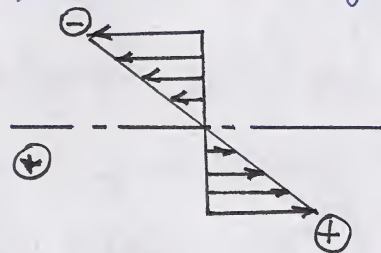
→ DIRECCIÓN
LONGITUDINAL

En una viga en flexión hay
def. longitudinal y transversal.

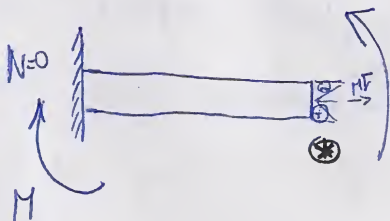
TENSIONES

• Los esfuerzos normales varían linealmente con la distancia y desde la sup. neutra.

Cuando κ es $\oplus \Rightarrow \sigma_x^S$ son compresión
 σ_x^I son tracción



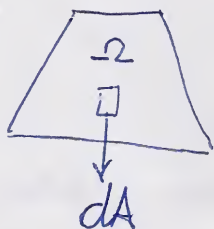
Eje neutro



Planteo una ΣF en x

$$\Sigma F_x = N + \int_A \sigma \cdot dA = 0$$

son ceros.



$$\int_A -E \kappa \cdot y \cdot dA = -\kappa \cdot E \int_A y \cdot dA = 0$$

DEBE
SER 0

MOMENTO ESTÁTICO
CON RESPECTO AL
EJE NEUTRO.

PASA POR EL BARICENTRO
DE LA SECCIÓN.

$$\int_A y \cdot dA = 0$$

el eje neutro pasa por el centroide
del área de la sección transversal
Cuando el material obedece la ley
de Hooke y no hay una fuerza axial que actúe sobre la
sección transversal.

RELACION MOMENTO - CURVATURA

(21)

POR UNA SEGUNDA ECUACIÓN DE ESTADICA (momentos)

$$\Sigma M_o = -M - \int_{\Omega} y \cdot \sigma \cdot dA = 0$$

$$dM = dF \cdot y = y \cdot dF \cdot dA$$

$$M = - \int y \cdot (-E \cdot \epsilon \cdot k_c) \cdot dA$$

$$M^F = \int_{\Omega} y \cdot \sigma \cdot dA$$

$$= E \cdot k_c \int_{\Omega} y^2 \cdot dA = E \cdot k_c \cdot I$$

$$\boxed{k_c = \frac{M}{E \cdot I}}$$

Relaciona la def. específica con el momento
La curvatura es directamente prop. al
momento M e inversamente prop. a $E \cdot I$

Siendo $E \cdot I$ la rigidez de flexión de la viga.

$$M_{\pm} \rightarrow \oplus \rightarrow k_c \rightarrow \oplus$$

Momentos flectores positivos producen curvaturas
positivas.

FORMULA DE
FLEXION

$$\boxed{\sigma_x = - \frac{M \cdot y}{I} = \epsilon \cdot E}$$

Esfuerzos direct prop.
a M e inversos a I

$$\sigma_x = -E \cdot k_c \cdot y \quad k_c = \frac{M}{E \cdot I}$$

los esfuerzos varían lineal

$$\sigma_x = - \cancel{E} \cdot \frac{M}{\cancel{E \cdot I}} \cdot y = - \frac{M \cdot y}{I}$$

mente con la distancia
y desde el eje neutro.

ESF. MAXIMOS \rightarrow en los puntos más alejados del eje neutro.

$$\sigma_1 = - \frac{M \cdot C_1}{I}$$

$$S_1 = \frac{I}{C_1} \quad \text{o} \quad S_2 = \frac{I}{C_2}$$

$$\sigma_2 = \frac{M \cdot C_2}{I}$$

\hookrightarrow modulo de sección

DISÑO DE VIGAS PARA FLEXIÓN

se deben considerar muchos factores.

TIPO DE ESTRUCTURA, MATERIAL, CARGA, AMBIENTE, etc.

pero al final todo se reduce a seleccionar forma y tamaño de la viga. De manera que los esfuerzos reales ~~no~~ excedan los permisibles para el material.

MODULO
DE
SECCION
REQ.

$$S = \frac{M_{MAX}}{\sigma_{PERM}}$$

→ PROP. DEL MATERIAL Y
FACTOR DE SEGURIDAD
DESEADO.

es normal seleccionar una viga que tenga la menor área de sección transversal. ~~para~~ minimizar peso y ahorrar material. pero debe seguir proporcionando los mismos modulus.

LIMITACIONES

Solo para flexión pura de vigas prismáticas de mat. homogéneo. lin. elástico, se le somete a flexión no uniforme se producen abales de las secciones

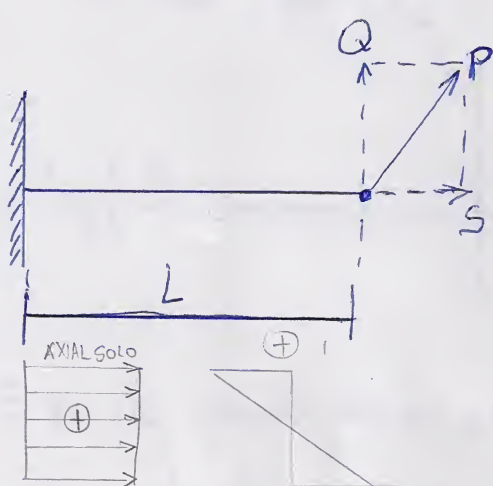
FLEXION PLANA COMPUESTA

Cargas de flexión con Cargas axiales (22)
(Columna de un edificio).

Si los elementos no son demasiado esbeltos, los esfuerzos combinados se obtienen por superposición de esfuerzos de flexión y de los esfuerzos axiales.

$N \rightarrow$ sea cte. en toda la sección

$M \rightarrow$ esfuerzo linealmente variable



$$M = Q(L - x)$$

$$\sigma_N = \frac{N}{A}$$

$$V = -Q$$

$$N = S$$

$$\sigma_M = -\frac{M \cdot y}{I}$$

$$\sigma_T = \frac{N}{A} - \frac{M \cdot y}{I}$$

Suma de diagramas

Si el esfuerzo de flexión en la parte superior de la viga es numéricamente menor que el axial, toda la sección transversal estará en tracción, si son iguales la distribución será triangular, y si el esfuerzo de flexión es numéricamente mayor que el esfuerzo axial, la sección transversal estará parcialmente en compresión y parcialmente en tracción.



Cuando M y N actúan el eje neutro se corre y ya no pasa por el baricentro.

CARGA
AXIAL
EXCENTRICA

Carga que no actúa en el Centroide de Area (sección transversal).

la distancia e se la conoce como excentricidad de la carga (distancia entre la carga y el eje X). Aparece un momento P.e.

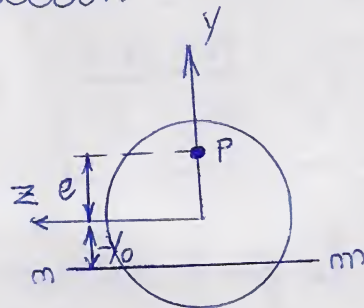
$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{P \cdot e \cdot y}{I}$$

↓
Area de la sección

↓
 I_z

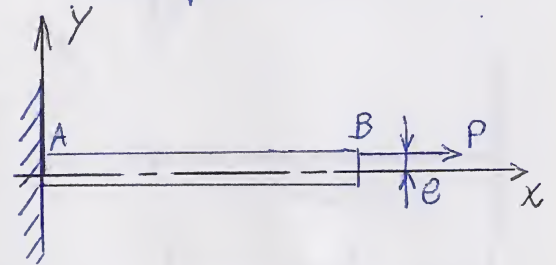
Con $\sigma = 0$

$$y_0 = - \frac{I}{A \cdot e}$$



el eje neutro se encuentra debajo del eje Z cuando e es positiva y está arriba del Z cuando e es negativa.

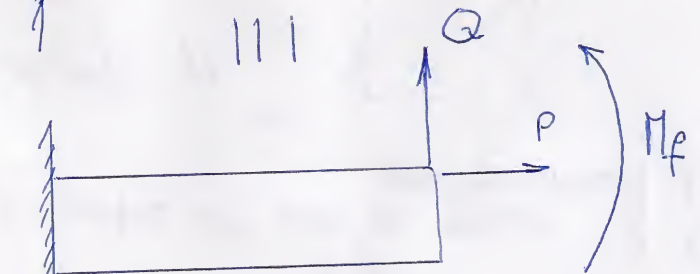
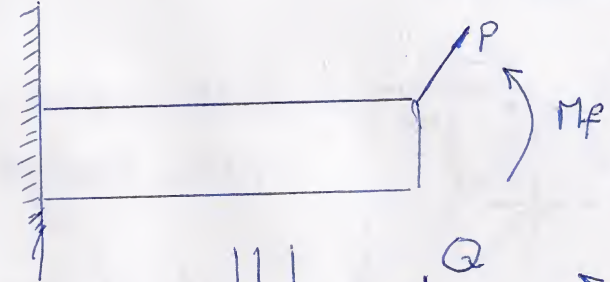
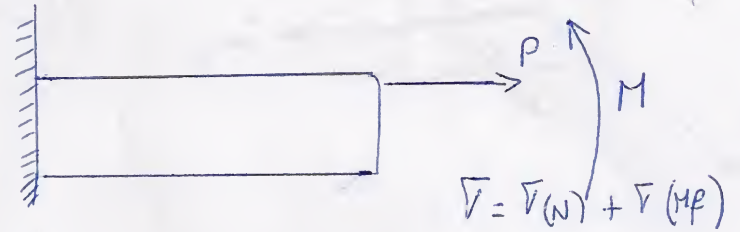
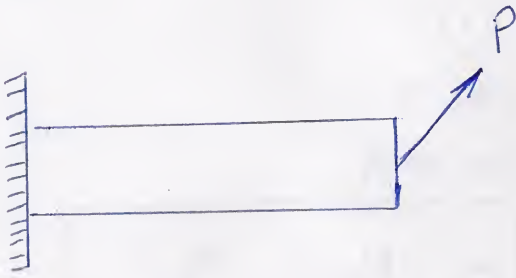
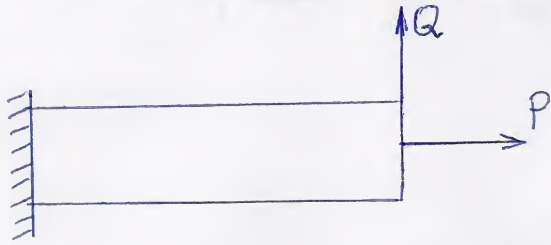
valida cuando
P está por sobre X.



y_0 se mide desde el eje Z
 y_0 es positiva en la dirección del eje Y , se identifica como $-y_0$ cuando se muestra hacia abajo en la figura.

Solo es valido para vigas robustas.

razón entre longitud y altura = 10 o menor es robusta.



$$\text{El } M_f(M) + M_f(Q) + \underbrace{M_f(P \cdot e)}_{\text{POR TENSIONES NORMALES SE CORRE EL EJE}}$$

$$\frac{\tau}{\tau_G(c_g)} = 0$$

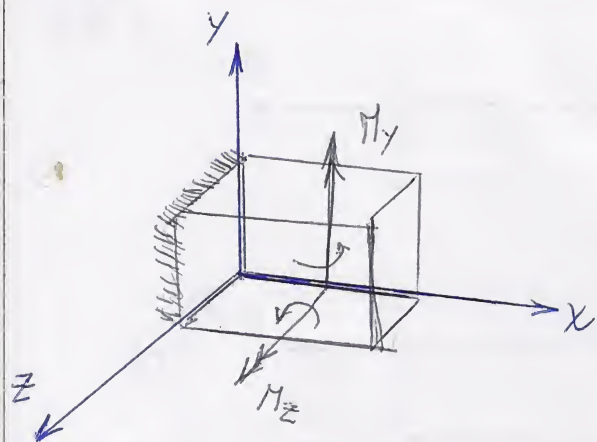
POR
TENSIONES
NORMALES
SE CORRE EL
EJE

Val también para secciones robustas.

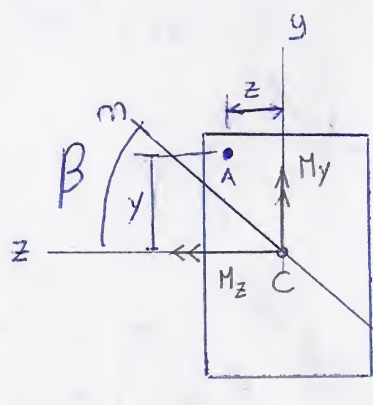
FLEXIÓN
OBLICUA
SIMPLE

viga sometida a cargas que no actúan en el plano de simetría, Cargas inclinadas.

- Las Cargas inclinadas deben actuar en el Centroides de la sección transversal para evitar el torcimiento a lo largo del eje longitudinal.
- Los vectores de momento son positivos cuando estos apuntan en dirección de los ejes positivos.



M_y y M_z se obtienen a partir de la fórmula de flexión. (luego se superponen).



(+) M_y produce tracción en A

(-) M_z produce compresión en A

el esfuerzo normal

$$\sigma_x = \frac{M_y \cdot z}{I_y} - \frac{M_z \cdot y}{I_z}$$

I_y
 I_z } MOMENTOS DE INERCIA DEL AREA con respecto a y y a z

EJE NEUTRO \rightarrow igual a 0.

$$\frac{M_y \cdot z}{I_y} - \frac{M_z \cdot y}{I_z} = 0 \quad \left(\text{recta que pasa por "C"; (m.m)} \right)$$

β (ángulo entre el eje neutro y el eje z)


$$\tan \beta = \frac{y}{z} = \frac{M_y \cdot I_z}{M_z \cdot I_y}$$

β está entre -90 y 90

Es útil para encontrar los puntos donde los esfuerzos normales son máximos.

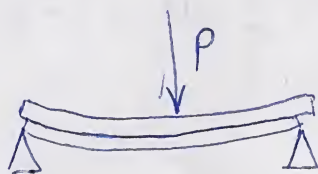
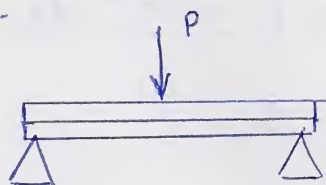


Los máximos ocurren en puntos ubicados del eje neutro. (los esfuerzos varían linealmente).

Esfuerzos
Cortantes
con 

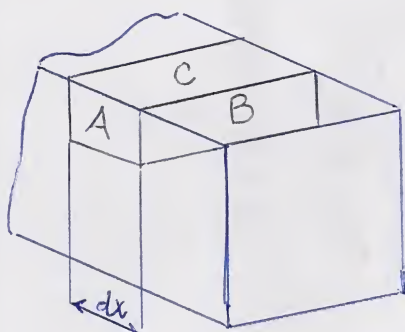
Bajo Casos de flexión no uniforme. En (24) estos casos en la viga se desarrollan esfuerzos normales y cortantes.

• Los esfuerzos cortantes son verticales y horizontales.



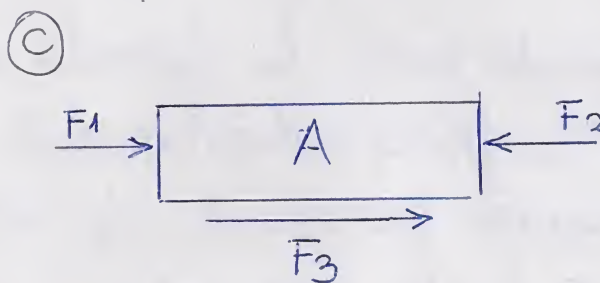
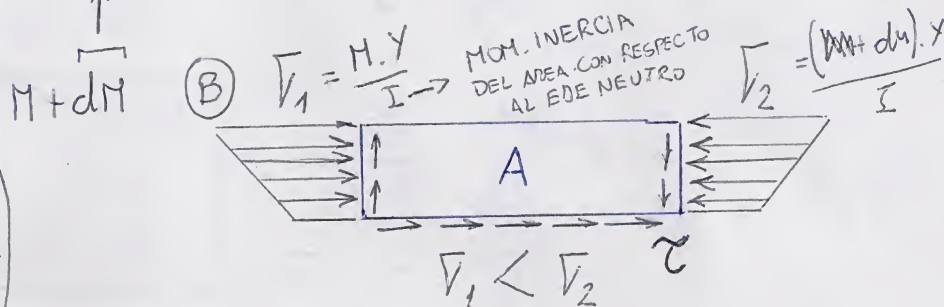
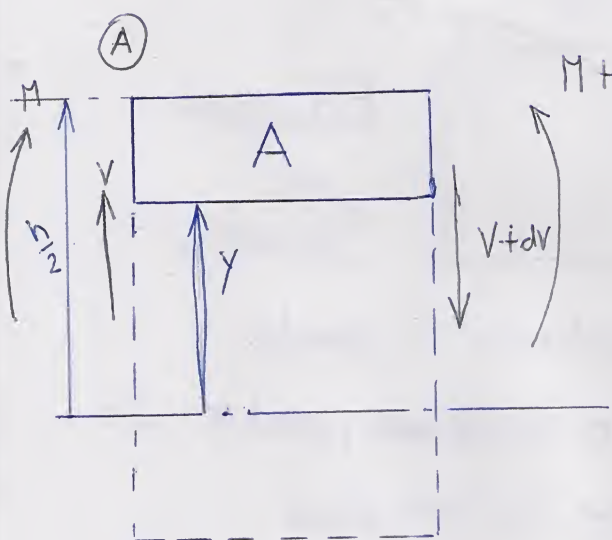
FORMULA
DE JOURASKY

Formula de esf. cort. en viga rectangular
Se considera una viga sometida a flexión no uniforme



Se toman en cuenta las mismas suposiciones que hizo BREDT.

Pueden cambiar conforme me muevo a lo largo del eje de la viga.



en (B) no hay esfuerzos en la cara superior ya $F_1 < F_2$
que la cara es parte de la sup. de la viga.
(LIBRE DE ESFUERZOS). La cara inf. si (dentro de viga)

Los M y $M + dM$ son iguales, de lo contrario no habría τ en la cara inferior.

$$F_1 = \int_B \tau_1 \cdot dA = \int_B \frac{M \cdot y}{I} dA$$

$$F_2 = \int_B \tau_2 \cdot dA = \int_B (M + dM) \cdot \frac{y}{I} dA = \int_B \frac{M \cdot y}{I} dA + \int_B \frac{dM \cdot y}{I} dA$$

$$F_3 = \tau \cdot b \cdot dx = F_1 - F_2$$

$$F_3 = \int_{C'} \tau \cdot dA = \tau \cdot \int_{C'} dA = \tau \cdot dx \cdot b$$

\downarrow
 C'
 AGUADO

$$F_1 - F_2 = - \int_B \frac{M \cdot y}{I} dA + \int_B \frac{M \cdot y}{I} dA + \int_B \frac{dM \cdot y}{I} dA$$

$$\tau \cdot b \cdot dx = \int_B \frac{dM \cdot y}{I} dA = \frac{dM}{I} \int_B y \cdot dA$$

$$\tau = \underbrace{\frac{dM}{dx}}_V \cdot \frac{S_B}{b \cdot I} = \boxed{\frac{V \cdot S_B}{b \cdot I} = \tau} \quad \begin{array}{l} \text{Ecuación} \\ \text{de} \\ \text{SOURASKY} \end{array}$$

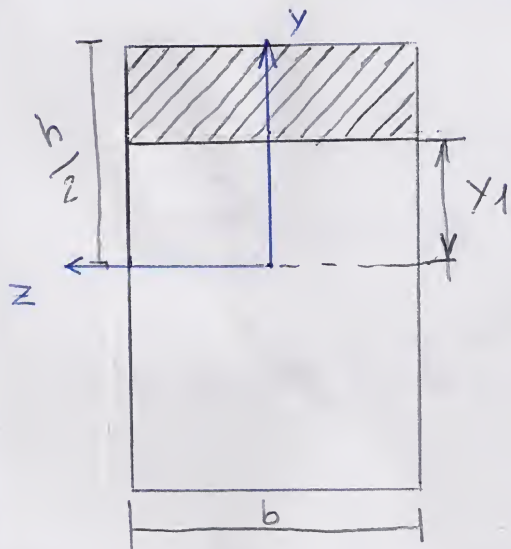
$\rightarrow Q$

Conocida como la fórmula del cortante, puede utilizarse para determinar el τ en cualquier punto en la sección transversal de una viga rectangular.

V , I y b son ctes.; Q (Mom. estática) varía con la distancia y desde el eje neutro.

DISTRIBUCIÓN
DE ESF.
CORT. EN
VIGA RECTANGULAR

Obtenemos Q de la parte (25)
sombreada. Como se distribuye τ .

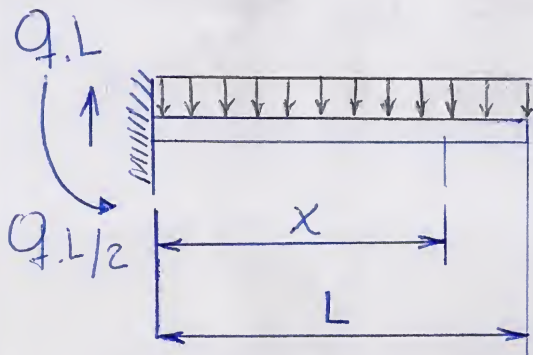


$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$Q = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \frac{1}{2} \left(y + \frac{h}{2} \right)$$

Com $X = \frac{3}{4} L$

$$V\left(\frac{3}{4}L\right) = \frac{q \cdot L}{4}$$



$$\tau = \frac{q \cdot \frac{L}{4} \cdot b \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \frac{1}{2} \left(y + \frac{h}{2} \right)}{b \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}}$$

$$\tau = \frac{V}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

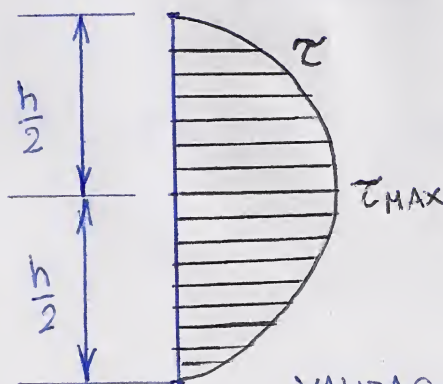
$$\tau = 0 \Rightarrow y = \pm h/2$$

Los esfuerzos cortantes en una viga rectangular varían cuadráticamente con la distancia y desde el eje neutro.

Com $y=0$ ($A=b \cdot h$)

$$\tau_{MAX} = \frac{V \cdot h^2}{8I} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{A}$$

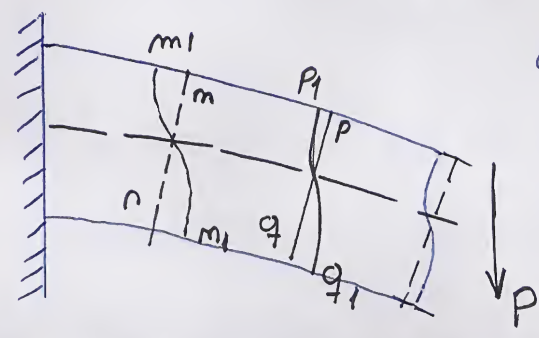
Osea el τ_{MAX} es 50% más que el esf. cort. promedio V/A



VALIDA SOLO PARA MAT. LIN. ELASTICO CON DEF PEQUEÑA.

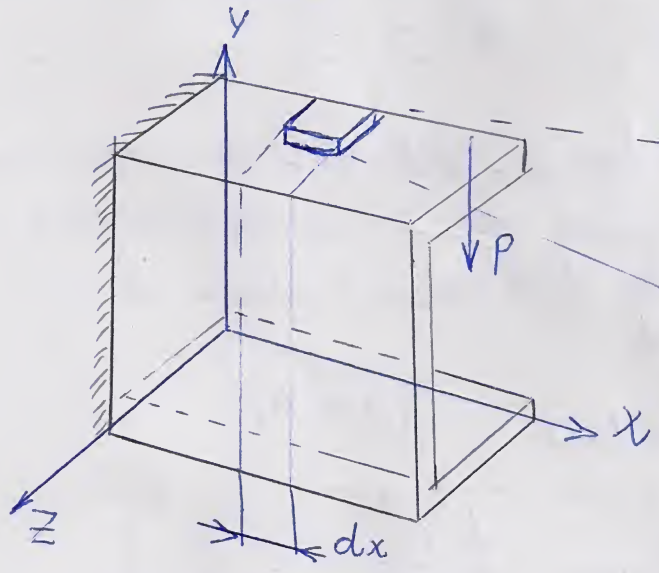
EFFECTOS DE LAS DEF. POR CORTANTE.

γ varía parabólicamente, la deformación por cortante $\gamma = \tau / G$ también varía de esa manera. Como resultado de estas deformaciones por cortante, las secciones transversales de la viga que originalmente eran superficies planas se alabean.

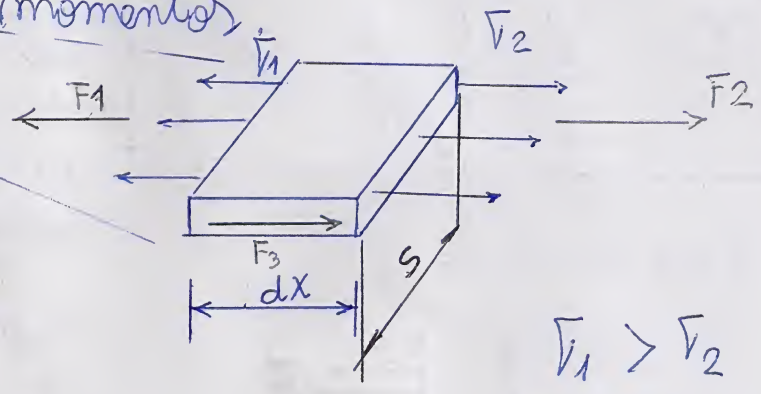


Si V (fuerza de corte) es cte a lo largo del eje de la viga, el alabeo es el mismo en cada sección transversal.

FLUJO DE τ

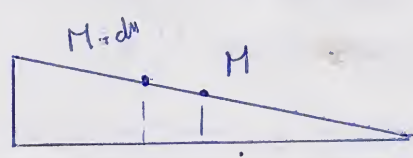
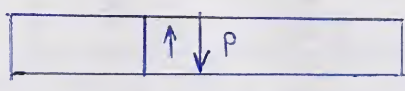


El sentido de τ lo sacamos mirando el diagrama de momentos



$$F_1 > F_2$$

$$F_3 + F_2 = F_1$$



$$F_1 = \int_{-z} \tau_1 \cdot dA$$

$$F_2 = \int_{-z} \tau_2 \cdot dA$$

(26)

$$\tau_1 = \frac{(M + dM) \cdot y}{I}$$

$$\tau_2 = \frac{M \cdot y}{I}$$

$$F_3 = F_1 - F_2$$

$$= \int_{-z} \frac{dM \cdot y \cdot dA}{I} = \frac{dM \cdot Q_z}{I}$$

$$F_3 = dM \cdot Q_z$$

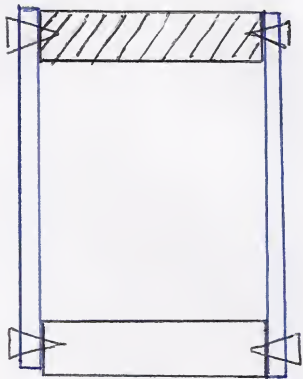
$$\frac{F_3}{dx} = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{Q_z}{I} = \boxed{\frac{V \cdot Q_z}{I} = f}$$

Si $F_1 = F_2 \Rightarrow F_3 = 0 \rightarrow$ NO HAY FLUJO.

El flujo cortante f es la fuerza horizontal por Unidad de longitud a lo largo del eje longitudinal de la viga.

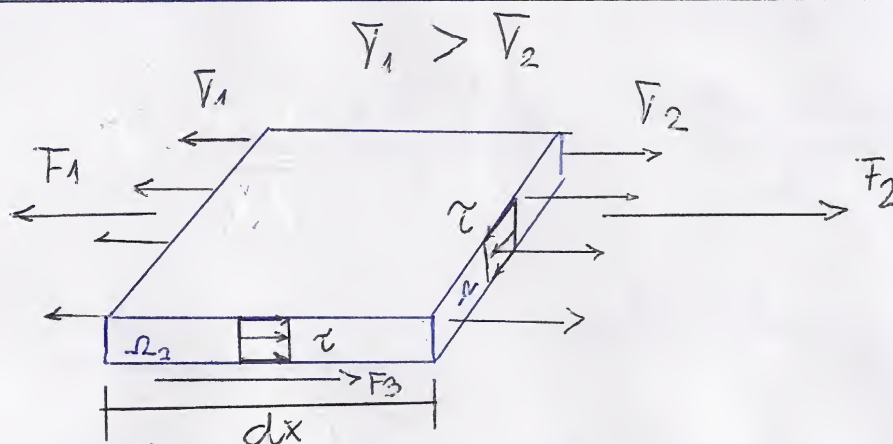
VIGAS ARMADAS Son vigas unidas por partes, ya sea con clavos, remaches o soldaduras.

Se realizan para cumplir con necesidades especiales arquitectónicas o estructurales y para proporcionar secciones transversales mayores que las que se dispone comúnmente.



$$f = \frac{F_s}{L} = \boxed{\frac{V \cdot Q_{-2}}{I}}$$

TENSIONES
DE CORTE
EN SECC.
PARED.
DELGADA



$$F_3 = \int \tau \cdot dA = \tau \int_{-t}^t dA$$

$A = t \cdot dx$

siendo t el espesor.

$$F_3 = \tau \cdot t \cdot dx \Rightarrow \tau = \frac{F_3}{t \cdot dx}$$

$$\frac{F_3}{t \cdot dx} = \frac{dM}{t \cdot dx} - \frac{Q_{-2}}{I}$$

$$\boxed{\tau = \frac{V \cdot Q_{-2}}{t \cdot I}}$$

En el extremo libre los τ son 0.

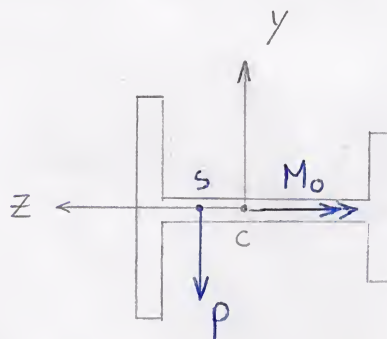
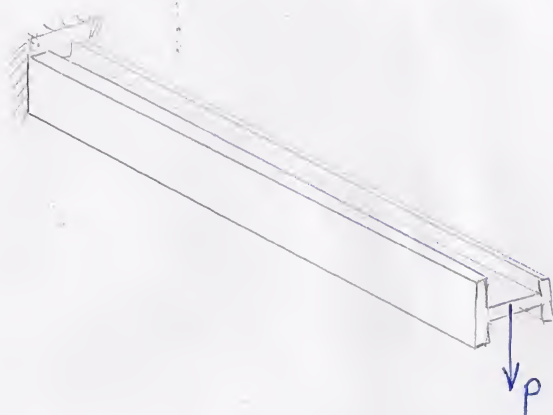
CENTRO DE CORTE

Las cargas laterales actúan en un plano que no es de simetría.

Para que la viga fluya SIN TORSIÓN se deben aplicar las cargas en un punto particular de la sección transversal denominado Centro de Corte.

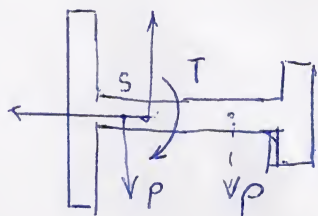
Por ejemplo:

VIGA DE PERFIL I desequilibrado



El punto S es el C.C. ; se aplica la fuerza P de modo tal

que flumne sin TORSIÓN.
Si la carga se aplica en algun otro punto sobre el eje Z,



La fuerza que actua en S flexiona con respecto a Z y el par de torsion produce TORSIÓN.

el CC se ubica sobre cualquier eje de simetría.

RESUMEN COLOQUIO

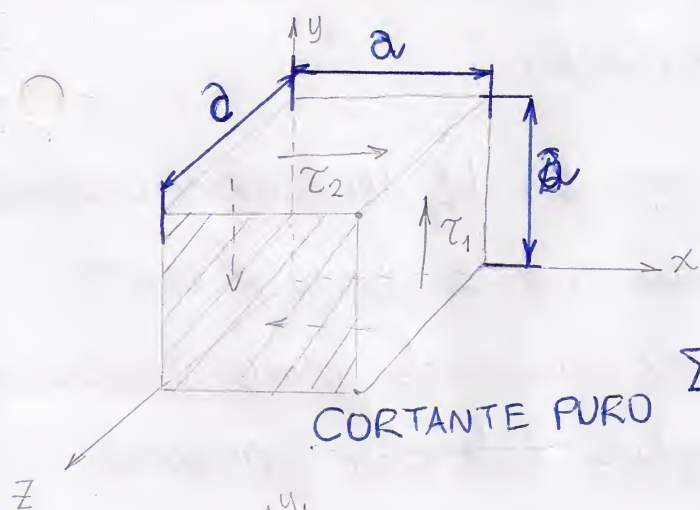
MEC. DE LAS ESTRUCTURAS

(28)

UNIDAD 1 FUNDAMENTOS DE LA RESIST. DE MATERIALES.

- Igualdad de los esfuerzos cortantes en planos perpendiculares.

Se considera un elemento de material sometido a esfuerzos cortantes.

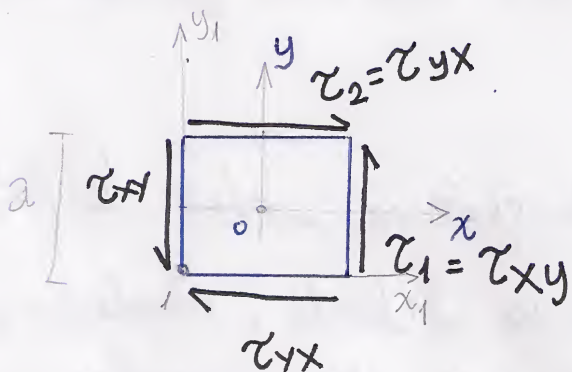


$$\sum F_x = \tau_{yx} \cdot A - \tau_{xy} \cdot A = 0$$

$$\sum F_y = \tau_{xy} \cdot A - \tau_{yx} \cdot A = 0$$

$$\sum M_o = \tau_{xy} \cdot A \cdot \frac{a}{2} - \tau_{yx} \cdot A \cdot \frac{a}{2} + \tau_{xx} \cdot A \cdot \frac{a}{2} - \tau_{yy} \cdot A \cdot \frac{a}{2} = 0$$

$$\tau_{xy} \cdot A \cdot a - \tau_{yx} \cdot A \cdot a + \tau_{xx} \cdot A \cdot a - \tau_{yy} \cdot A \cdot a = 0$$



hago sumatoria de momentos, en
① y se demuestra que en

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$

$$\sum M_i = -\tau_{yx} \cdot A \cdot \frac{a}{2} + \tau_{xy} \cdot A \cdot \frac{a}{2} = 0$$

Las tensiones normales producen alargamientos.

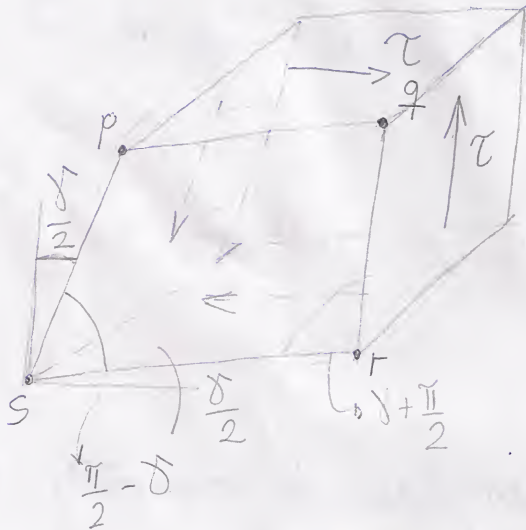
Las tensiones de corte, cambian de forma o distorsiones.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Las magnitudes de los Cuatro esfuerzos cortantes que actúan sobre el elemento son iguales.

① Los esfuerzos cortantes sobre caras opuestas y paralelas de un elemento son iguales en magnitud y opuestos en dirección.

② Los ef. cortantes sobre caras adyacentes (y perp) de un elemento son de igual magnitud y tienen direcciones tales, que ambos esfuerzos apuntan alejándose de la línea de intersección de las caras.



aparecen los def. unitarios cortantes, el elemento no se alarga o acorta, mas bien cambia de forma. Los ángulos laterales cambian.

δ es una medida de la distorsión o cambio de forma del elemento, deformación unitaria cortante, medido en Grados o Radiantes puesto que es un ángulo.

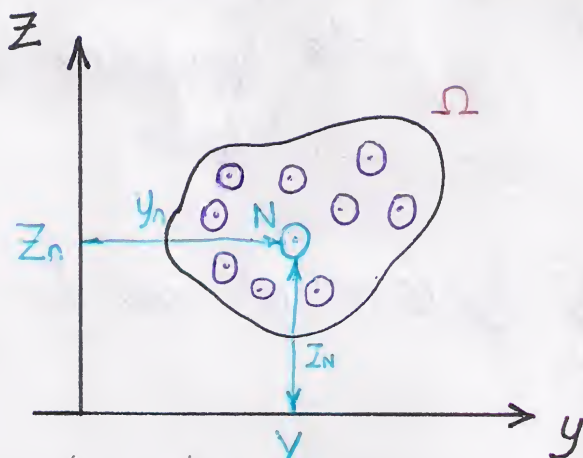
ELEMENTOS CARGADOS AXIALMENTE

(29)

Una barra prismática de longitud L , si es sometida a una carga P de T o C, se alargará o comprimirá un δ .

Si P actúa en el Centroide de la sección transversal, el esfuerzo normal uniforme en las secciones transversales responde a la formula de $\sigma = \frac{P}{A}$. Además si es homogéneo el material su def. axial $\epsilon = \delta/L$

Para que todos los σ sean de igual magnitud en la sección se debe plantear



$$\sigma = \text{cte. } \forall (y, z) \in \Omega$$

$$dM = \underbrace{z}_{\vec{r}} \cdot \underbrace{\sigma}_{\vec{F}} \cdot dA$$

$$\sum M_y = N \cdot z_n + \int_{\Omega} z \sigma \cdot dA = 0$$

$$|N \cdot z_n| = \left| \int_{\Omega} z \cdot \sigma \cdot dA \right|$$

$$N \cdot z_n = \sigma \cdot \int_{\Omega} z \cdot dA$$

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot dA \cdot z_n = \sigma \int_{\Omega} z \cdot dA$$

$$\cancel{\sigma} \int_{\Omega} dA \cdot z_n = \cancel{\sigma} \int_{\Omega} z \cdot dA$$

$$A \cdot z_n = \int_{\Omega} z \cdot dA$$

$$N = \int_{\Omega} \sigma \cdot dA$$

$$A \cdot z_n = S_y$$

$$z_n = \frac{S_y}{A} = z_{CG}$$

debe ser
cte. al
pasar por el baricentro

Es la Coordenada z del
baricentro de la sección

(2)

$$dM' = Y \cdot \bar{V} \cdot dA$$

$$\Sigma M_z = N \cdot Y_n + \int_{\Omega} Y \cdot \bar{V} \cdot dA = 0$$

$$N \cdot Y_n = - \int_{\Omega} Y \cdot \bar{V} \cdot dA \quad \text{tomo valor abs.}$$

$$\int_{\Omega} \bar{V} \cdot dA = N$$

$$N \cdot Y_n = \int_{\Omega} Y \cdot \bar{V} \cdot dA$$

$$\int_{\Omega} \bar{V} \cdot dA \cdot Y_n = \int_{\Omega} Y \cdot \bar{V} \cdot dA$$

$$\int_{\Omega} dA \cdot Y_n = \int_{\Omega} Y \cdot dA$$

$$Y_n = \frac{S_z}{A} = Y_{cg}$$

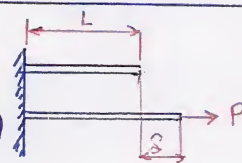
Coordenada Y del foricentro de la sección.

Si N o P pasan por el foricentro de la sección entonces

$$\bar{V} = \frac{N}{A}$$

FORMULA DE AXIAL (δ)

Suponiendo que el material sigue la Ley de Hooke.



donde $\bar{V} = E \cdot \epsilon$

Ademas si es homogéneo $\epsilon = \frac{\delta}{L}$ su def. axial

$$\textcircled{1} \bar{V} = E \cdot \epsilon$$

$$\textcircled{2} \bar{V} = E \cdot \frac{\delta}{L}$$

$$\textcircled{3} \frac{P}{A} = E \cdot \frac{\delta}{L}$$

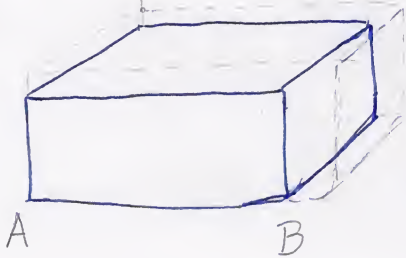
$$\textcircled{4} \frac{P \cdot L}{E \cdot A} = \delta$$

$$\frac{L}{E \cdot A} = f \quad (f \text{ flex})$$

$$\frac{E \cdot A}{L} = K \quad (K \text{ rig})$$

EFFECTO TERMICO

Se producen deformaciones SIN CARGA.



producto de dilataciones o contracciones, se producen deformaciones y esfuerzos térmicos.

ϵ_T es proporcional al cambio de temperatura ΔT

$$\epsilon_T = \alpha (\Delta T)$$

↳ Coef. de dilatación térmica

$$\alpha = [1/K] [1/^{\circ}C]$$

Supongamos una barra cargada axialmente, con def. longitudinales dados por $\epsilon = \nabla / E$

IGUALD

$$\epsilon_T = \alpha \Delta T$$

$$\alpha \Delta T = \frac{\nabla}{E}$$

$$\epsilon = \nabla / E$$

$$\alpha \cdot E \cdot \Delta T = \nabla$$

Supongamos la misma barra con ϵ debido a ΔT

Con "L" siendo una dimensión

$$\Delta_T = \epsilon_T \cdot L = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

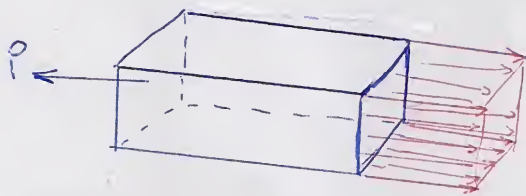
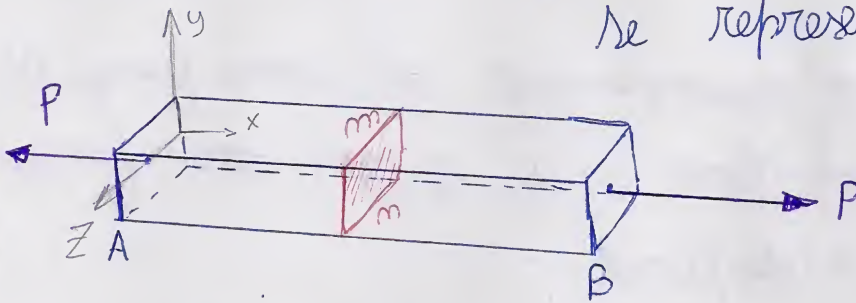
RELACION TEMP
DESPLAZAMIENTO.

ESF. SOBRE SECCIONES INCLINADAS

31

- BARRA PRISMÁTICA
- MAT. HOMOGÉNEO
- P en el CG de Secc.
- Hooke

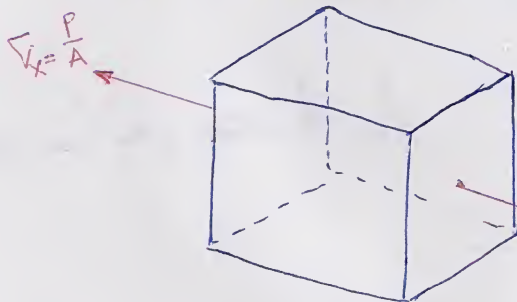
se tiene una barra prismática sometida a una P
se representa así



$$\sigma_x = \frac{P}{A}$$

se puede dibujar plano pero
se debe tener en cuenta
su espesor.

o con un elemento de esfuerzo



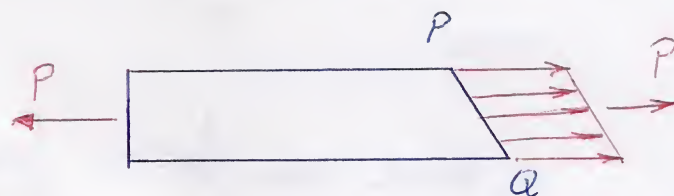
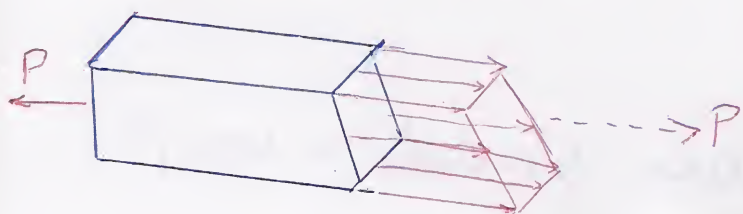
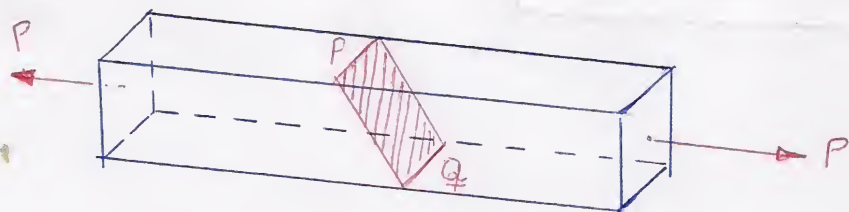
$$\sigma_x = \frac{P}{A}$$

VISTA LIMITADA

REP. COMPLETA

en una sección inclinada

Los esf. son los mismos en toda la barra, los que actúan
sobre la sección inclinada deben estar distribuidos de
manera uniforme.



P es la resultante, puede descomponerse en una fuerza N normal, perpendicular al plano $P-Q$ y en una fuerza V cortante tangencial a este plano.

$$N = P \cdot \cos \theta$$

$$V = P \cdot \sin \theta$$

asociados a N y V se tienen esf. normales y cortantes distribuidos de manera uniforme.

$$\bar{\sigma} = \frac{N}{A_1}$$

$$\bar{\tau} = \frac{V}{A_1}$$

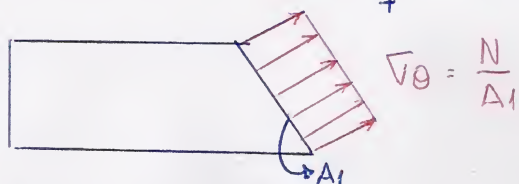
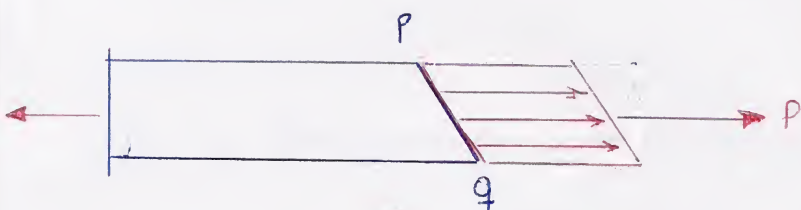
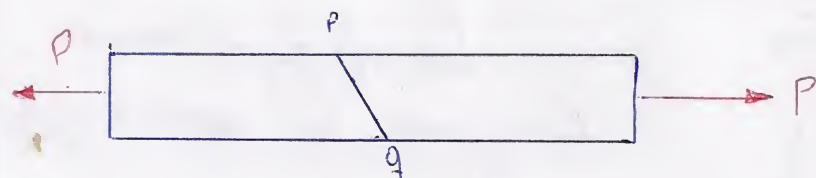
A_1 el área de la sección

$$A_1 = \frac{A}{\cos \theta}$$



$$\cos \theta = \frac{A}{A_1}$$

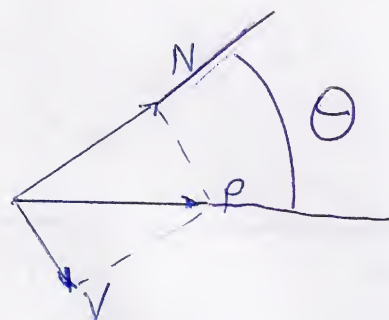
$$A_1 = \frac{A}{\cos \theta}$$



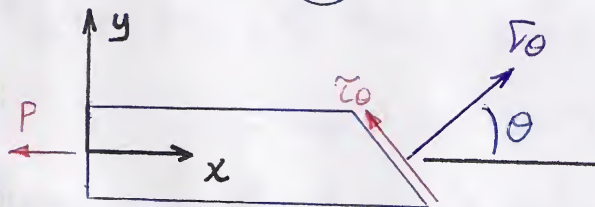
$$\sigma_{\theta} = \frac{N}{A_1}$$



$$\tau_{\theta} = -\frac{V}{A_1}$$



La Convención de signos usada es (+)



$$\sigma_{\theta} = \frac{N}{A_1} = \frac{P \cos \theta}{A}$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{P}{A} \cos^2 \theta \Rightarrow \sigma_{\theta} = \sigma_x \cos^2 \theta$$

Simplemente se plantea y se simplifica

$$\tau_{\theta} = -\frac{V}{A_1} = -\frac{P \sin \theta}{A} \cos \theta \Rightarrow \tau_{\theta} = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta$$

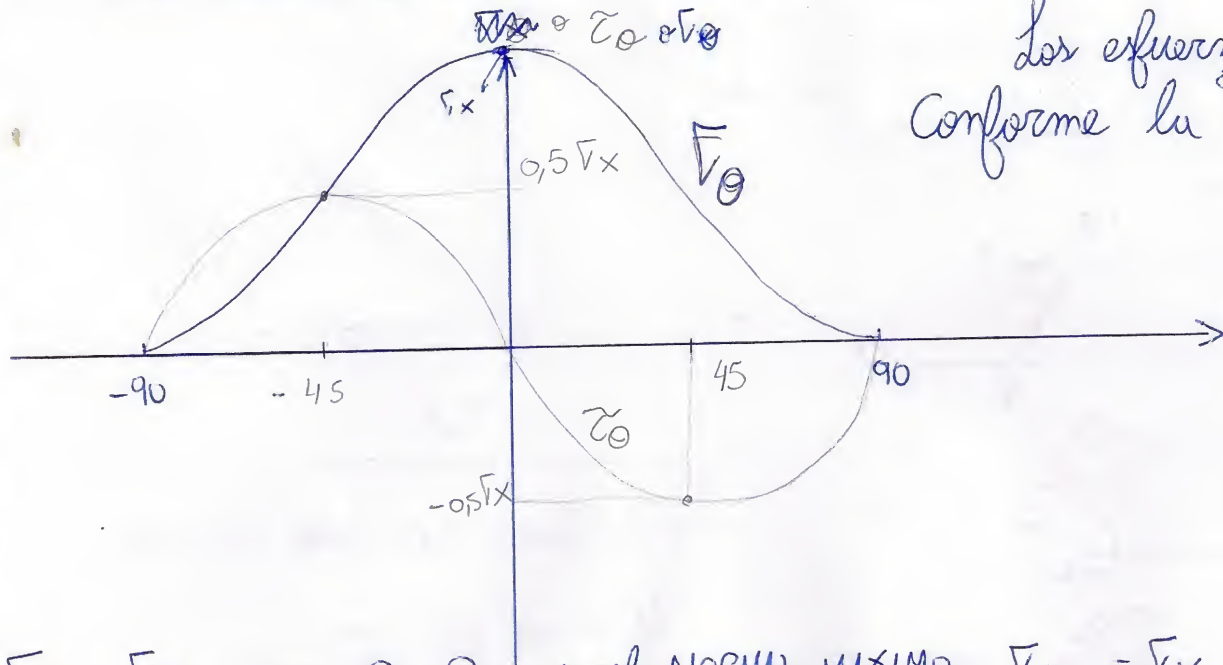
$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2} = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos 2\theta)$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

$$\tau_{\theta} = -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\theta$$

ENF. NORMAL Y CORTANTE MAXIMO



Los esfuerzos varían
conforme la sección gira

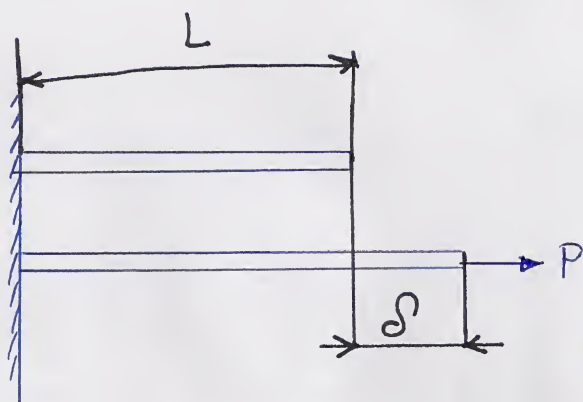
$$\sigma_{\theta} = \sigma_x \text{ con } \theta = 0 \rightarrow \text{esf NORMAL MAXIMO } \sigma_{\text{MAX}} = \sigma_x$$

$$\pm 90^\circ = \theta \Rightarrow \sigma_{\theta} = 0$$

Con $\theta = \pm 45$ el esfuerzo normal es la mitad del valor máximo

τ_{θ} es 0 sobre las secciones transversales de la barra así como en las longitudinales.

$$\text{Con } \theta = -45 \rightarrow \tau_{\text{MAX}} = \frac{\sigma_x}{2}$$

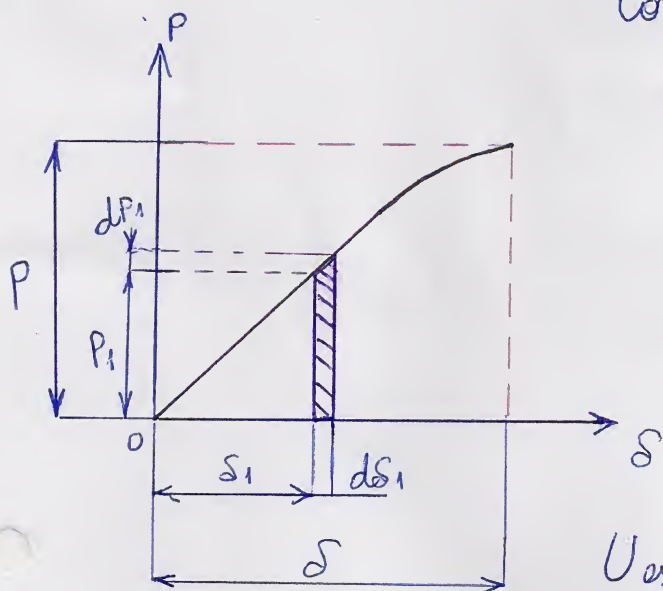


Se considera una barra prismática de longitud L sometida a una P de tracción. La carga se aplica lentamente (PROCESO DE CARGA ESTÁTICO), no

hay efectos dinámicos o inerciales. debido a movimientos

$P \Rightarrow$ trabajo!

Con el diagrama Carga desp. para calcular su trabajo.



$$W = \int_0^{\delta} P_1 \cdot dS_1$$

W es el área debajo de la curva $P-S$

Usar la energía de deformación.

$$U = W = \int_0^{\delta} P_1 \cdot dS_1$$

pongo P en función de S

$$U = \int_0^{S_{MAX}} \frac{S \cdot E \cdot A}{L} dS$$

$$S = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$$

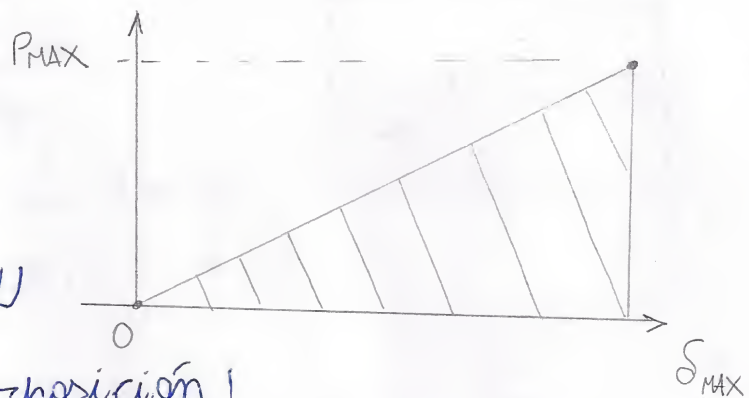
$$U = \frac{E \cdot A}{L} \int_0^{\delta} S \cdot dS = \frac{E \cdot A}{L} \cdot \frac{S^2}{2} \Big|_0^{S_{MAX}}$$

$$P = \frac{S \cdot E \cdot A}{L}$$

$$U = \frac{E \cdot A \cdot S_{MAX}^2}{2L}$$

$$U = \frac{A \cdot E}{L} \cdot \frac{S_{MAX}^2}{2} = \frac{\cancel{A \cdot E}}{\cancel{L}} \cdot \frac{S_{MAX}}{2} \cdot P_{MAX} \cdot \frac{\cancel{A \cdot E}}{\cancel{L}}$$

$$U = \frac{1}{2} P_{MAX} \cdot S_{MAX}$$



Area del triángulo = U

• NO VALE la superposición!



$$U = \frac{\cancel{A \cdot E}}{2 \cancel{L}} \cdot \frac{P_{MAX}^2 \cdot L^2}{\cancel{E} \cdot \cancel{A} \cdot \cancel{L}} = \frac{P_{MAX}^2 \cdot L}{2 E A}$$

$$U_1 = P_1^2 \cdot \frac{L}{2 E A}$$

$$U_2 = P_2^2 \cdot \frac{L}{2 E A}$$

$$U_3 = (P_1 + P_2)^2 \cdot \frac{L}{2 E A}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

$$U_1 + U_2 = U_3 ?$$

$$\frac{P_1^2 \cdot L}{2 E A} + \frac{P_2^2 \cdot L}{2 E A} = \frac{L}{2 E A} (P_1^2 + P_2^2) \neq U_3$$

DENSIDAD DE ENERGÍA

Cantidad de energía de deformación por
Unidad de volumen de material

el cuadrado
NO distribuye con
la suma!

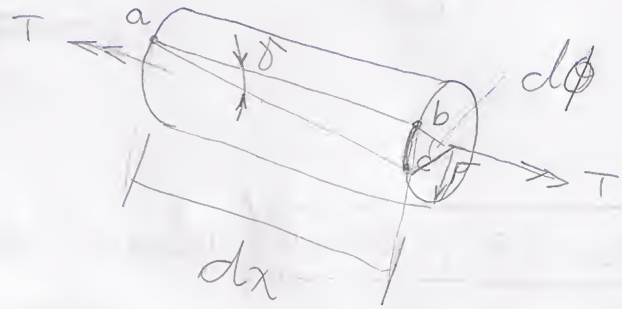
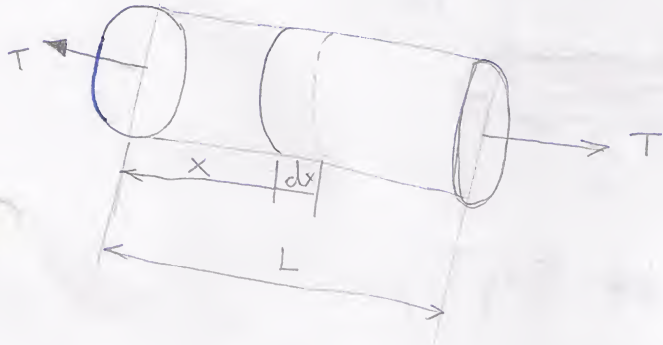
$$u = \frac{U}{A \cdot L} = \frac{\frac{1}{2} \cdot S \cdot P}{A \cdot L} = \frac{1}{2} \cdot S \cdot P \cdot \frac{1}{A \cdot L} =$$

$$\left[\frac{J}{m^3} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{S}{L} \cdot \frac{P}{A} = \left[\frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \epsilon \right]$$

TORSIÓN

(34)

- Barra prismática de sección circular, con T en sus extremos (en torsión pura)
- Secciones transversales planas y circulares, los radios rectos. Ángulo pequeño, no varía L ni los radios.
- L y forma son ctes., secc. transv. planas.



γ_{MAX} es la magnitud de deformación por cortante en la superficie exterior de la barra. γ_{MAX} es el decremento en este ángulo

$$\gamma_{MAX} = \frac{b.c}{ab} \quad [rad]$$

r es el radio de la barra

$$b.c = r \cdot d\phi$$

$$ab = dx$$

$$\gamma_{MAX} = \frac{r \cdot d\phi}{dx}$$

def unitaria por cortante con el ángulo de torsión.

$$\theta = \frac{d\phi}{dx} \rightarrow \text{Razón de torsión!}$$

$$\gamma_{MAX} = r \cdot \theta$$

TORSIÓN PURA

$$\theta = \frac{\phi}{L}$$

$$\gamma_{MAX} = \frac{r \cdot \phi}{L}$$

EN FIBRAS INTERIORES

$$\gamma = \rho \cdot \theta = \frac{\rho}{r} \cdot \gamma_{MAX}$$

(7)

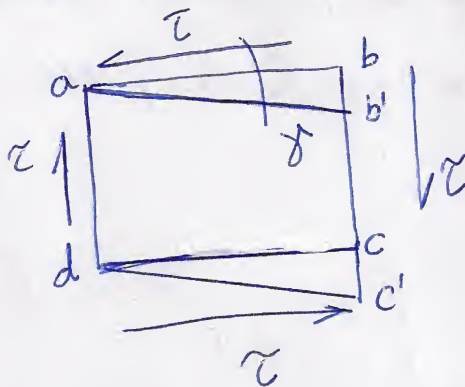
$$\tau = G \cdot \gamma \quad (\text{Ley de Hooke en Cortante})$$

$$\tau_{\text{MAX}} = G \cdot r \cdot \theta$$

$$\tau = G \cdot \rho \cdot \theta = \frac{\rho}{r} \cdot \tau_{\text{MAX}}$$

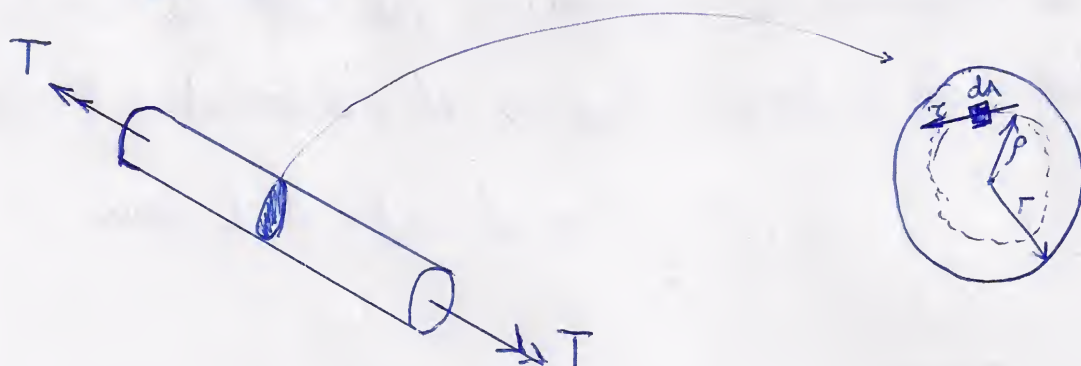
$$\frac{\tau_{\text{MAX}}}{G \cdot r} = \theta$$

τ_{MAX} es de Corte en el exterior de la barra.
 τ es en el interior

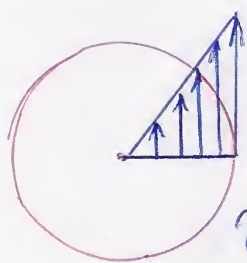


FORMULA DE TORSIÓN (Relación entre τ y T)

se tiene



Los esfuerzos actúan continuamente alrededor de la sección transversal, resultante en forma de un momento, igual a T



Se considera un elemento dA ubicado a una distancia ρ desde el eje, la fuerza cortante del elemento es igual a $\tau \cdot dA$; siendo τ el esf. de corte en ρ .

El momento de fuerza con respecto al eje es

$$dM = \tau \cdot \rho \cdot dA = \frac{\rho \cdot \tau_{\text{MAX}}}{r} \cdot \rho \cdot dA = \frac{\tau_{\text{MAX}}}{r} \cdot \rho^2 dA$$

M resultante debe ser igual a T

(35)

$$T = \int_A dM = \int_A \frac{\tau_{\max}}{r} \cdot \rho^2 \cdot dA = \frac{\tau_{\max}}{r} \cdot \underbrace{\int_A \rho^2 dA}_{I_p}$$

$$I_p$$

$$T = \frac{\tau_{\max}}{r} \cdot I_p$$

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \quad \text{Con secc. circular}$$

$$\tau_{\max} = \frac{T \cdot r}{I_p}$$

ANGULO DE TORSION

$$\tau_{\max} = G \cdot r \cdot \theta = \frac{T \cdot r}{I_p}$$

Como $\theta = \frac{d\phi}{dx}$

$$\int d\phi = \int \theta dx$$

$$\phi = \theta \cdot l$$

$$\theta = \frac{T}{G \cdot I_p}$$

MULTIPLICO POR "l"

$$\underbrace{\theta \cdot l}_{\phi} = \frac{T \cdot l}{G \cdot I_p}$$

$$\phi = \frac{T \cdot l}{G \cdot I_p}$$

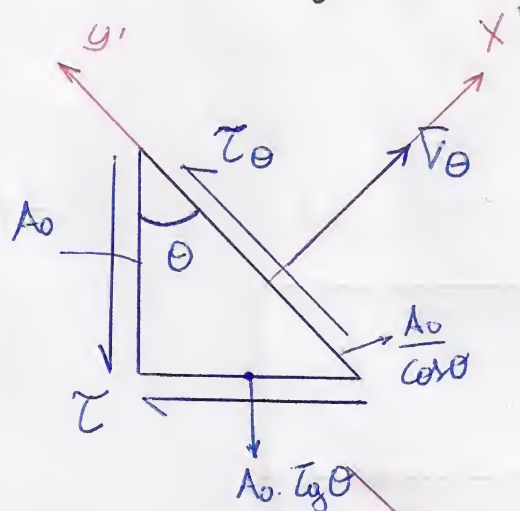
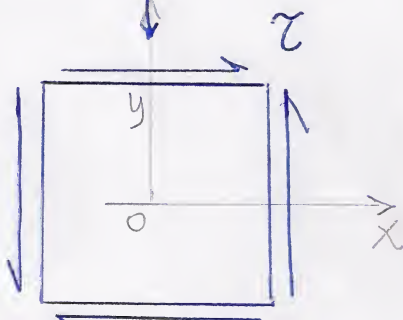
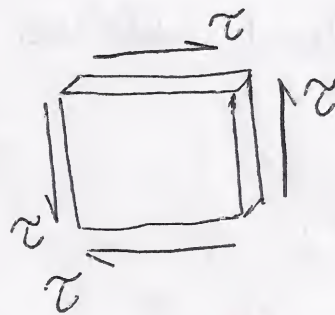
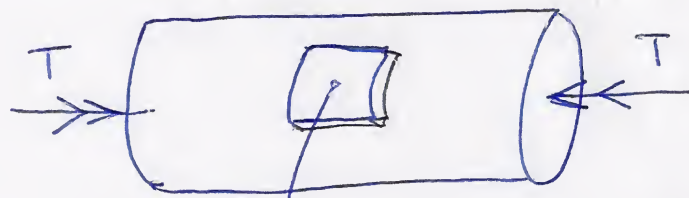
VIGA HUECA

Permite ahorrar material y aligerar las estructuras, al mismo tiempo parte del material esta cerca del borde con los ef. de corte y brazos de palanca mayores.

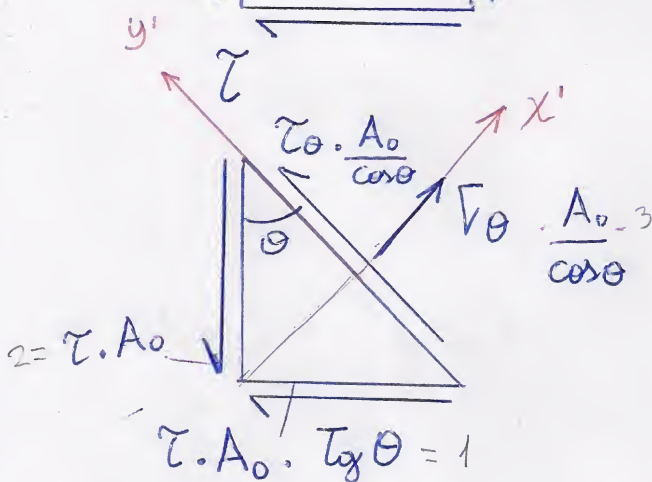
$$\frac{l}{G I_p} : \text{flexibilidad TORSIONAL}$$

$$\frac{G \cdot I_p}{l} : \text{Rigidez torsional}$$

E y D unitarias en C.P

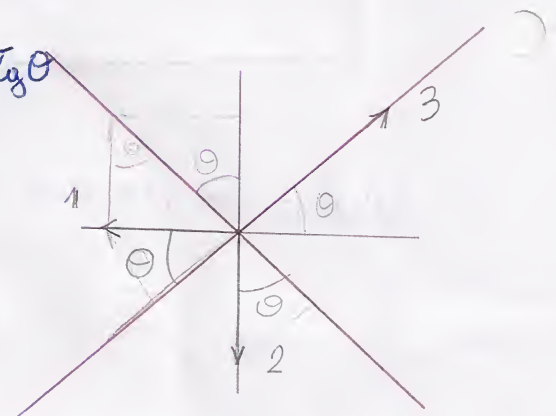


si lo paso
a fuerza
MULTIPLICADO POR
EL AREA



$$\sum F_{x'} = 0$$

$$\sum F_{y'} = 0$$



$$\sum F_{x'} = \frac{V_\theta A_0}{\cos \theta} - \cancel{\tau A_0 \cdot \tan \theta \cdot \cos \theta} - \cancel{\tau A_0 \cdot \tan \theta} = 0$$

$$0 = \frac{V_\theta}{\cos \theta} - \tau \frac{\tan \theta \cos \theta}{\cos \theta} - \tau \tan \theta$$

$$\frac{V_\theta}{\cos \theta} = \tau \tan \theta + \tau \tan \theta$$

$$\boxed{V_\theta = 2\tau \cdot \tan \theta \cdot \cos \theta}$$

$$\sum F_{y'} = \tau A_0 \cdot \tan \theta \cdot \sin \theta - \cancel{\tau A_0 \cdot \cos \theta} + \frac{V_\theta A_0}{\cos \theta} = 0$$

$$= \tau \frac{\tan \theta}{\cos \theta} \sin \theta - \tau \cos \theta + \frac{V_\theta}{\cos \theta} = 0$$

$$-\frac{\tau \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \tau \cos^2 \theta = \frac{\tau_0}{\cos^2 \theta}$$

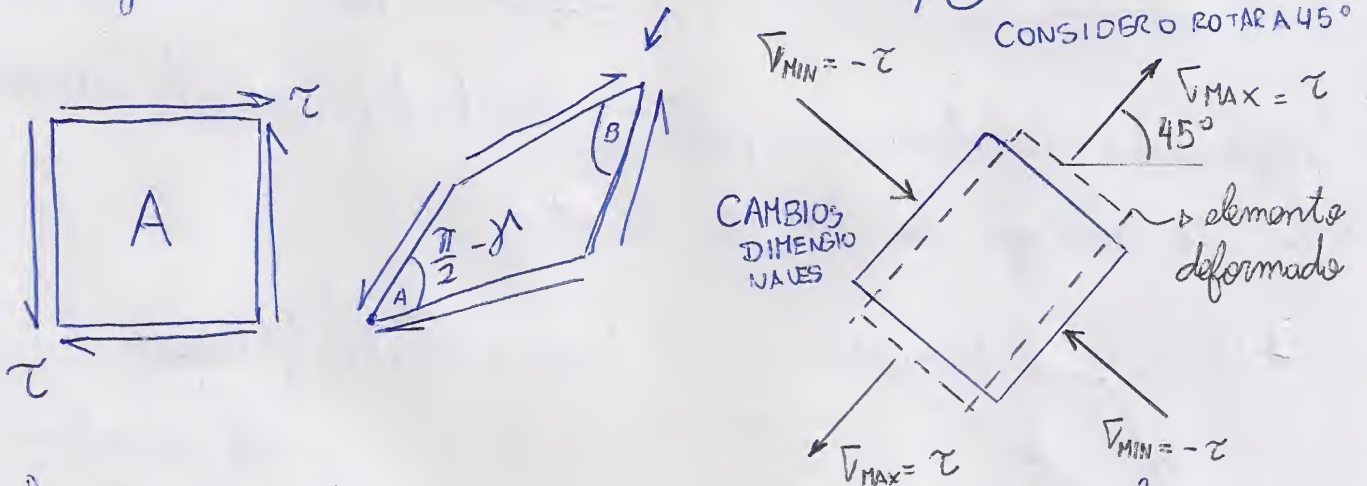
$$\tau \left(\frac{-\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \cos^2 \theta \right) = \frac{\tau_0}{\cos^2 \theta}$$

$$\tau_0 = \tau (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

γ es una medida de distorsión, los lados NO cambian (incluido el espesor) de un p. rect, pero a paralelogramo oblicuo

DEF. UNITARIA EN CORTANTE PURO

Si el material es linealmente elástico la deformación por cortante para un elemento orientado $\theta = 0^\circ$ se relaciona con la Ley de Hooke en cortante $\gamma = \tau / G$



La def. γ es el cambio de ángulo entre dos líneas, ocurre el mismo cambio de ángulo en "A" y "B", en las otras esquinas aumenta el ángulo. Se produce la llamada distorsión cortante.

$$\epsilon_{MAX} = \frac{\tau}{E} + \frac{\tau \cdot \nu}{E} = \frac{\tau}{E} (1 + \nu) \quad \tau = \gamma \cdot G$$

$$\epsilon_{MAX} = \frac{\gamma \cdot G}{E} (1 + \nu) \quad \text{Sale por Ley de HOOKE}$$

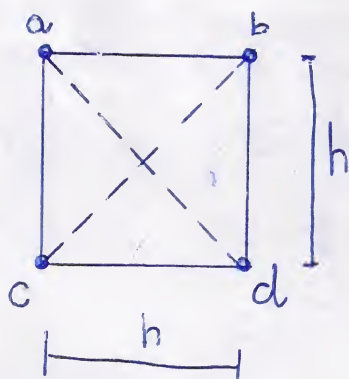
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow \epsilon_{MAX} = \frac{\gamma \cdot E}{2E \cdot \frac{2(1+\nu)}{E}} (1+\nu) \Rightarrow \epsilon_{MAX} = \frac{\gamma}{2}$$

$$\frac{\gamma}{2} = \epsilon$$

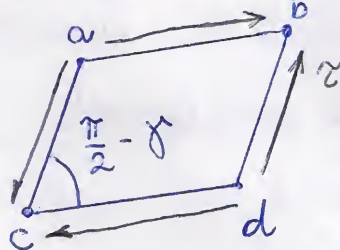
Relación entre la deformación por cortante γ y la deformación normal a los 45° (MAXIMA EN CORTANTE PURO).

RELACIÓN ENTRE E Y G

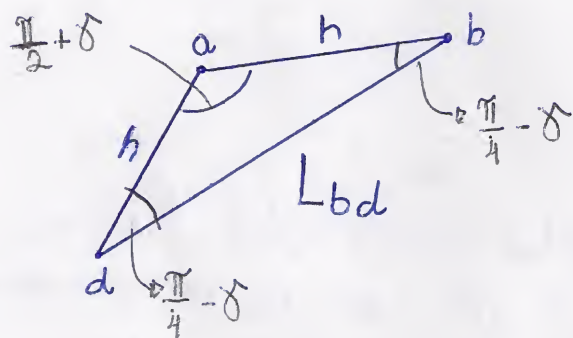
elemento de esfuerzo, Cuadrado con lado "h"



lo someto a cortante puro con τ , la figura se convierte en un ROMBO, con lados "h" y def. por cort $\gamma = \tau/G$



separando al elemento por la mitad, su diagonal, bd se alarga y ac se acorta



$$L_{bd} = \sqrt{2} \cdot h \cdot (1 + \epsilon_{MAX})$$

def. por cortante normal en la dirección a 45°

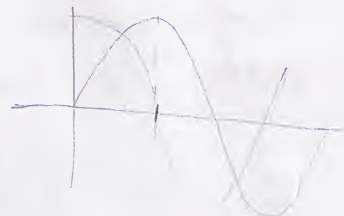
$$L_{bd}^2 = h^2 + h^2 - 2h^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)$$

$$2h^2 (1 + \epsilon_{MAX})^2 = 2h^2 - 2h^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)$$

$$2h^2 (1 + \epsilon_{MAX})^2 = 2h^2 (-1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right))$$

$$(1 + \epsilon_{MAX})^2 = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)$$

$$1 + 2\epsilon_{MAX} + \epsilon_{MAX}^2 = 1 + \sin\gamma$$



$$-\sin\gamma = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma\right)$$

$$1 + 2\epsilon_{MAX} + \epsilon_{MAX}^2 = 1 + \gamma$$

$\epsilon_{MAX} = 0$
MUY PEQUEÑO

$$\gamma = \delta$$

$$\epsilon^2 = 0$$

$$1 + 2\epsilon_{MAX} = 1 + \delta$$

$$2\epsilon_{MAX} = \delta$$

$$\boxed{\epsilon_{MAX} = \frac{\delta}{2}}$$

$$\epsilon_{MAX} = \frac{\gamma}{2}$$

$$\tau = \gamma \cdot G$$

$$\frac{\tau}{G}$$

$$\frac{\tau}{E} (1 + \nu) = \frac{\tau}{G} \cdot \frac{1}{2}$$

$$(1 + \nu) = \frac{E}{2G}$$

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1 + \nu)}}$$

$$\epsilon_{MAX} = \frac{L_{FIN} - L_{IN}}{L_{IN}}$$

$$\epsilon_{MAX} = \frac{\tau}{E} + \frac{\tau \cdot \nu}{E} = \frac{\tau}{E} (1 + \nu)$$

$$\frac{\tau_{MAX}}{E}$$

$$\tau = \epsilon \cdot E$$

$$\tau = \gamma$$

↳ POR LA TRACCION

↳ POISSON

↳ ORTOGONAL

POR POISSON ES

$$-\frac{\tau \nu}{E}$$

ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

o mismos conceptos básicos que en axial.

o barra prismática AB en torsión pura ante la acción de un T.

o gira ϕ en el extremo.

o MAT. LIN. ELASTICO Y SIGUE HOOKE

$$\phi = \frac{T \cdot l}{G I_p}$$

o Peq. ángulo de torsión.

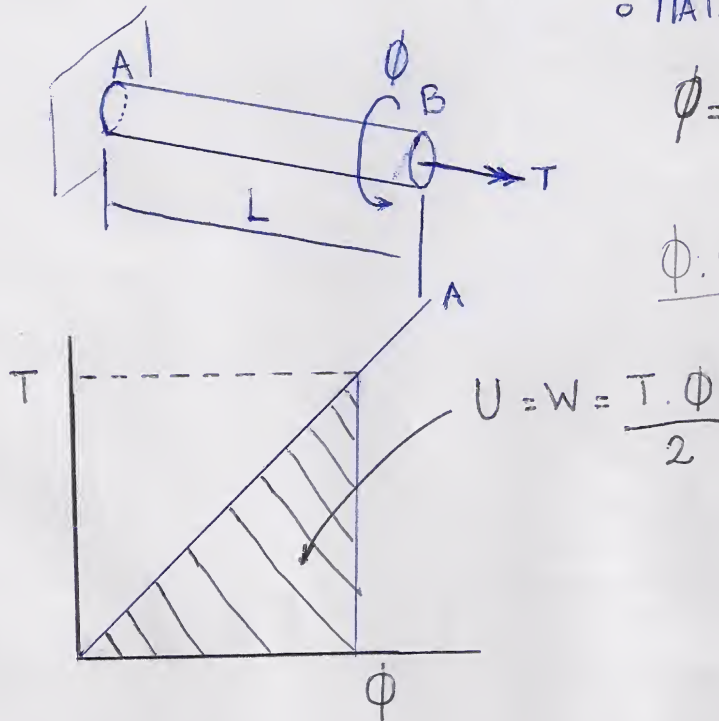
$$\frac{\phi \cdot G \cdot I_p}{l} = T$$

$$W = \int_0^{\phi_{MAX}} T \cdot d\phi$$

$$W = \int_0^{\phi_{MAX}} \frac{\phi \cdot G \cdot I_p}{l} \cdot d\phi$$

$$W = \frac{G \cdot I_p}{l} \cdot \frac{\phi_{MAX}^2}{2}$$

$$\frac{T^2 \cdot l}{2 G I_p} = \frac{G \cdot I_p}{2 l} \cdot \frac{T^2 \cdot l}{G^2 I_p^2}$$



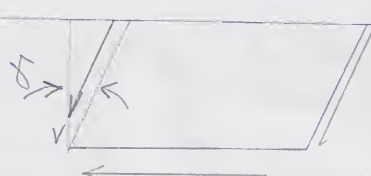
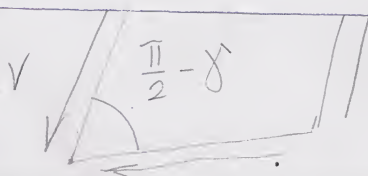
$$U = \frac{T}{2} \cdot \frac{T \cdot l}{G I_p} = \frac{T^2 \cdot l}{2 G I_p}$$

U en CP.

El análisis inicia considerando un elemento pequeño de material. sometido a esfuerzos τ . Se supone un Cuadrado de lado "h". Con espesor t .

Las fuerzas cortantes V sobre las caras laterales

se determinan como $V = \tau \cdot h \cdot t$



Cuadrado asi

Sup. al material L.E y que cumple con HOOKE (38)

$\boxed{\delta = \gamma \cdot h}$ el desplazamiento \rightarrow EN DEF. AL MACENAR POR EL ELEMENTO

Energía de def. almacenada $\rightarrow W = U = \frac{V \cdot \delta}{2}$, Si suponemos que el mat es linealmente elástico y que obedece HOOKE.

$U = \frac{\tau \cdot h \cdot t \cdot \delta}{2}$, Sabiendo que $\delta = \gamma \cdot h$

$U = \frac{\tau \cdot h^2 \cdot t \cdot \gamma}{2}$

$\mu = \frac{U}{Vol} = \frac{U}{h^2 \cdot t} = \frac{\tau \cdot h^2 \cdot t \cdot \gamma}{2 h^2 \cdot t}$

$\boxed{\mu = \frac{\tau \cdot \gamma}{2} = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{G \cdot \gamma^2}{2}}$

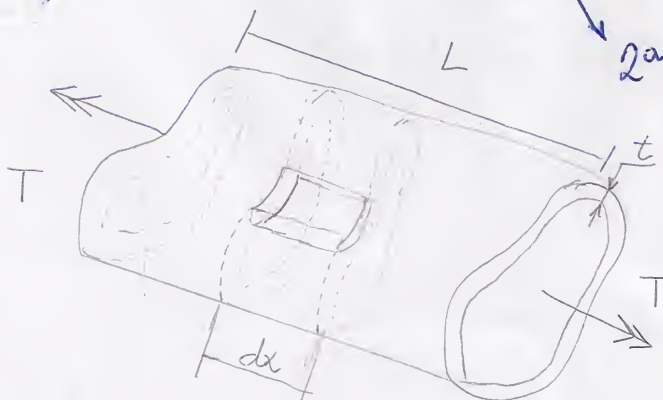
μ densidad de energía de deformación

TUBOS DE PARED DELGADA

- o UNICELULARES
- o SOBRE BARRAS PRISMATICAS.

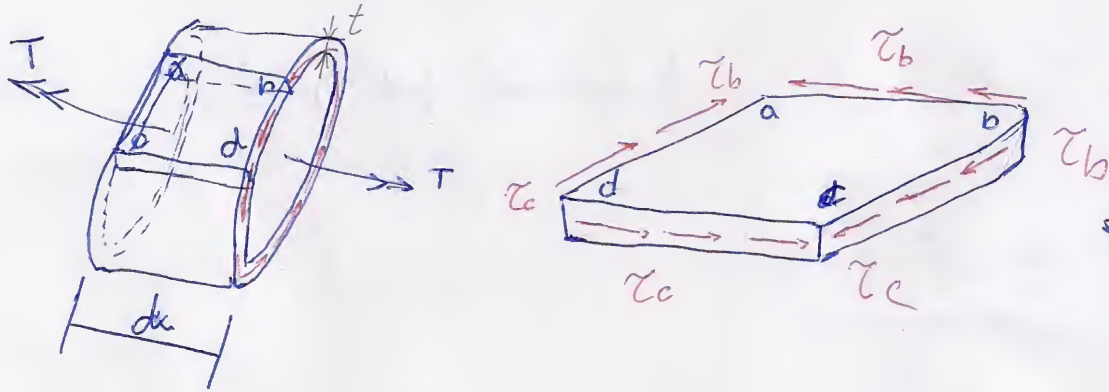
SUPOSICIONES \rightarrow BREDT \rightarrow 1ª: Los τ son paralelos y tangentes a la fibra media

2ª: Son todos iguales en magnitud



Se considera un tubo de pared delgada, rec. torsión pura y se encuentra sometido a un T

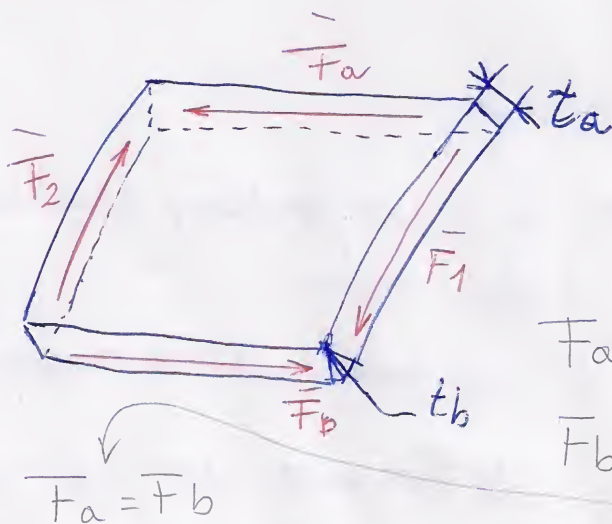
Los esfuerzos τ "fluyen" alrededor de la sección, actúan paralelos a los límites de la sección transversal.



los esfuerzos varían ligeramente con el espesor, pero al suponer un t muy pequeño, casi no varían y permanecen prácticamente cte.

$$\tau \approx cte$$

se busca determinar la magnitud de los esfuerzos.
se toma un elemento.



$$F_1 = F_2$$

$$F_a = F_b$$

$$t_a < t_b$$

$$F_a = \tau_a \cdot t_a \cdot dx$$

$$F_b = \tau_b \cdot t_b \cdot dx$$

$$F_a = F_b$$

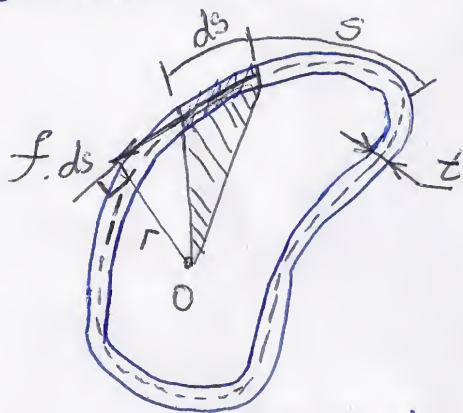
$$\tau_a \cdot t_a = \tau_b \cdot t_b$$

$$\tau \cdot t = cte \Rightarrow \text{FLUJO DE CORTE es cte.}$$

1ª Ec. de BREDT. (Relación entre f y T)

(39)

tomamos la secc. transversal.



Línea mediana (discontinua)

se considera un elemento de arco

con longitud ds y espesor t .

s define la ubicación del elemento

se mide a lo largo de la línea mediana y se elige arbitrariamente.

$f \cdot ds$ es la fuerza cortante y el momento con respecto a cualq. punto es.

$$dT = f \, ds \cdot r.$$

$$T = f \int_0^{L_m} r \, ds \quad \text{se integra a lo largo de } L_m$$

debe del

arco del Δ sombreado arriba

$$\int_0^{L_m} r \, ds = 2A_m \quad (2 \text{ veces el área contenido por la línea mediana}).$$

$$T = f \, 2A_m$$

$$T = t \cdot \tau \, 2A_m$$

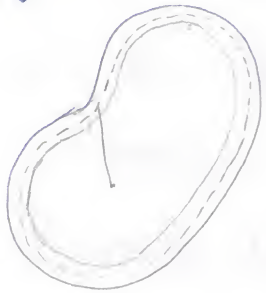
$$\tau = \frac{T}{2A_m t}$$

PRIMERA
ECUACIÓN
DE BREDT

(12)

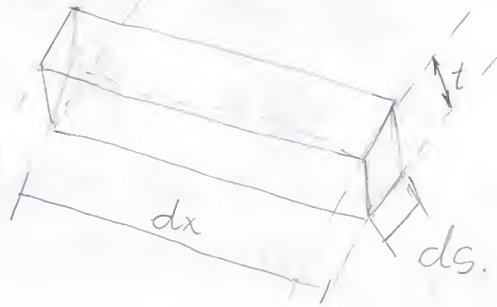
SEGUNDA EC. BREDT

determinar primero la EID. de un tubo de pared delgada.



IGUAL AL ANTERIOR

Area = $t \cdot ds$ (en la secc. transversal)
longitud dx



ELEMENTO C. P.

el volumen es $t \cdot ds \cdot dx$

por estar en cortante puro, la μ es $\mu = \frac{\tau^2}{2G}$

$$dU = \mu \cdot Vol = \frac{\tau^2}{2G} \cdot t \cdot ds \cdot dx$$

$$f = t \cdot \tau$$

$$dU = \frac{f^2}{2t^2 G} \cdot t \cdot ds \cdot dx$$

$$\tau = \frac{f}{t}$$

$$dU = \frac{f^2}{2G} \frac{ds}{t} \cdot dx$$

Integro sobre todo el volumen.

$$U = \int dU = \frac{f^2}{2G} \int_0^{Lm} \frac{ds}{t} \int_0^L dx$$

o lo largo de línea media

o lo largo del tubo

$$U = \frac{f^2 \cdot L}{2G} \int_0^{Lm} \frac{ds}{t} = \frac{T^2 \cdot L}{8G A_m^2} \int_0^{Lm} \frac{ds}{t}$$

$$f = \frac{T}{2 A_m}$$

$J = cte de TORSION$

$$J = \frac{4 A_m^2}{\int_0^{Lm} \frac{ds}{t}}$$

$$\frac{T^2 \cdot L}{8G \cdot A_m^2} \int_0^{Lm} \frac{ds}{t} = \frac{1}{2} T \cdot \phi$$

$$U = \frac{1}{2} T \cdot \phi$$

$$\phi = \frac{T \cdot L}{4G A_m^2} \int_0^{Lm} \frac{ds}{t}$$

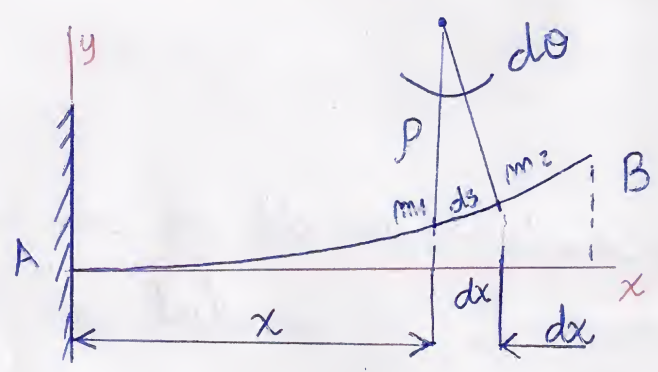
$$\phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J}$$

FLEXIÓN

o Hipotesis: Las secciones permanecen planas y ortogonales respecto a la directriz formada.

FLEXIÓN PURA: NO HAY Q . $M_f = cte$

II NO UNIFORME = $M_f \neq cte$. HAY Q .



$$K = \frac{1}{\rho}$$

Curva de deflexión.

del $\Delta m_1 m_2 O \rightarrow \int \rho \cdot d\theta = ds$
 ← ángulo entre normales, T o d

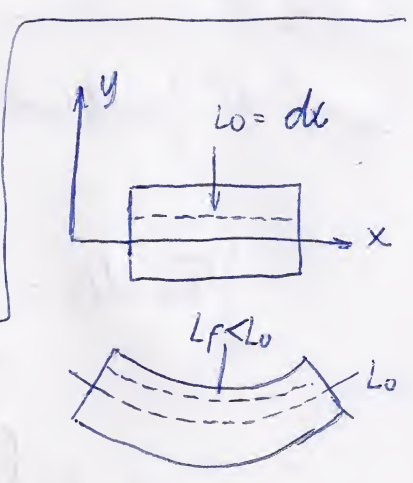
$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}$$

$\rho = \frac{ds}{d\theta}$ ← distancia entre m_1 y m_2

→ como las deflexiones SON PEQUEÑAS
 la Curva es Casi plana

$$ds \approx dx$$

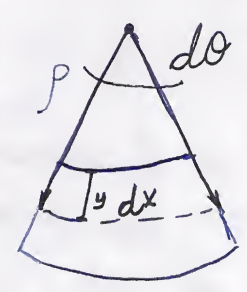
$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$$



DEF. QUE OCURREN (ϵ)

$$dx = L_0 = \rho \cdot d\theta$$

$$L_f = (\rho - y) \cdot d\theta$$



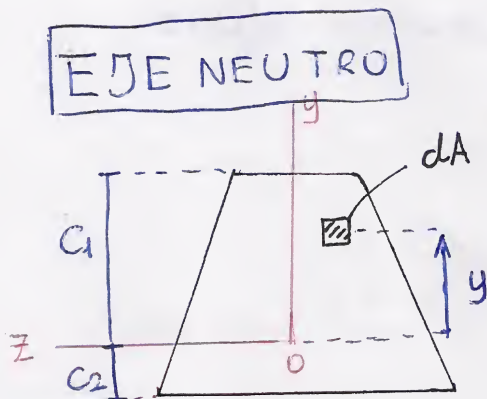
$$\epsilon = \frac{L_f - L_0}{L_0}$$

$$\epsilon = \frac{(p-y) d\theta - p \cdot d\theta}{dx} = \frac{\cancel{p \cdot d\theta} - y d\theta - \cancel{p \cdot d\theta}}{dx}$$

$$\epsilon = -y \frac{d\theta}{dx} = \boxed{-y \cdot K}$$

$$= \frac{-y d\theta}{p d\theta}$$

$$= -y \cdot \frac{1}{p} = -y \cdot K$$



Se Considera un dA de una secc. transversal; "y" es dist. al eje neutro,

$$\sigma_x = E \cdot \epsilon = -y \cdot K \cdot E$$

la fuerza que actúa es $\sigma_x \cdot dA$, en compresión
y es distancia al eje neutro

Con "y" positivo

$$\int_A \sigma_x \cdot dA = \int_A -E \cdot y \cdot K \cdot dA = 0 \quad \text{por no existir una fuerza que equilibre.}$$

$$= -E \cdot K \int_A y \cdot dA$$

$$\therefore \int_A y \cdot dA = Q_x \text{ (MOM. ESTÁTICO)}$$

$$\begin{cases} K \neq 0 \\ E \neq 0 \end{cases}$$

Se los omite puesto que no intervienen

el momento estático

respecto a Z es 0,

Z debe pasar por el

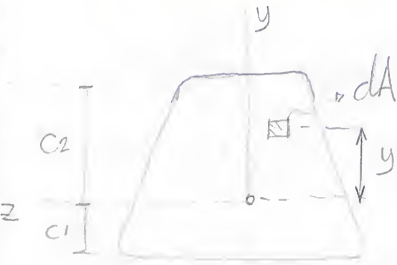
el eje neutro pasa por el centroide de A. de la sección

Cuando obedece Hooke y no hay fuerza axial que actúe sobre la sección.

En flexión pura el eje neutro es el eje "Z". La distancia del centroide de la sección y la tensión de las fibras sobre el eje neutro son iguales a 0.

FORMULA DE LA FLEXIÓN

41



por estática el momento debe ser igual al generado por $\bar{\sigma}_x dA \cdot y$. Como estricción del eje neutro, el momento y $\bar{\sigma}_x$ y dA tienen signos opuestos.

$$dM = -\bar{\sigma}_x \cdot y \cdot dA$$

$$\bar{\sigma}_x = E \cdot \epsilon$$

$$\int dM = - \int_A \bar{\sigma}_x \cdot y \cdot dA$$

$$\bar{\sigma}_x = E \cdot -K \cdot y = -K \cdot y \cdot E$$

$$M = - \int_A -K \cdot E \cdot y \cdot y \cdot dA$$

$$M = K \cdot E \cdot I$$

$$M = \int_A K \cdot E \cdot y^2 dA$$

$$K = \frac{M}{E \cdot I} = \frac{1}{\rho}$$

$$M = K \cdot E \cdot \underbrace{\int_A y^2 dA}_I$$

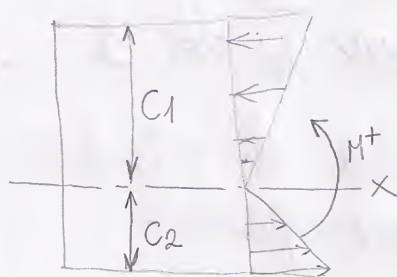
$$\bar{\sigma}_x = -K \cdot y \cdot E$$

$$\bar{\sigma}_x = - \frac{M}{E \cdot I} \cdot E \cdot y$$

$$\bar{\sigma}_x = - \frac{M \cdot y}{I_z}$$

FORMULA DE FLEXIÓN DE NAVIER

ESF. MAXIMOS EN UNA SECCIÓN TRANSVERSAL



los $\sigma_{1,2}$ se determinan en las fibras MAS ALEJADAS AL eje neutro. C_1, C_2 son las distancias desde el eje neutro hasta

los extremos.



$$\sigma_1 = - \frac{M \cdot C_1}{I} = - \frac{M}{S_1}$$

$$\sigma_2 = + \frac{M \cdot C_2}{I} = \frac{M}{S_2}$$

$$S = \frac{I}{C}$$

$$S_1 = \frac{I}{C_1}$$

$$S_2 = \frac{I}{C_2}$$

MODULO
DE
SECCIÓN

↓
COMBINACION
DE CANT.

IMPORTANTES

Si la sección transversal de la viga es doblemente simétrica y sus esfuerzos son iguales a tracción y compresión, podemos definir al modulo de sección requerido como

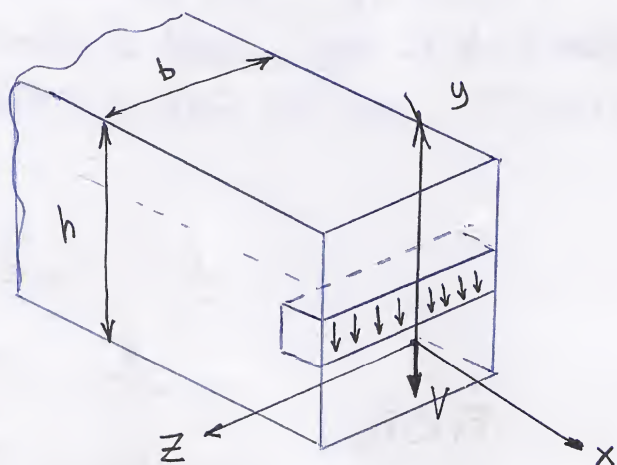
$$S_{REQ} = \frac{M_{MAX}}{\sigma_{AEM}} \quad [longitud^3]$$

ESF. CORTANTES EN VIGAS ☐

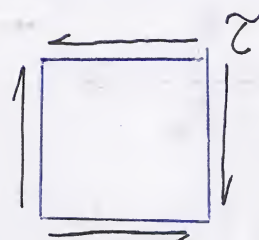
(42)

- Se considera una viga sometida a flexión no uniforme
 τ es paralelo a V , paralelos a los lados verticales de la sección transversal.

Los τ están distribuidos uniformemente a través del ancho de la viga; puede que varíen con la altura.



Se toma un elemento
 Cortado entre
 dos secc.
 transversales
 adyacentes
 y dos planos
 horizontales

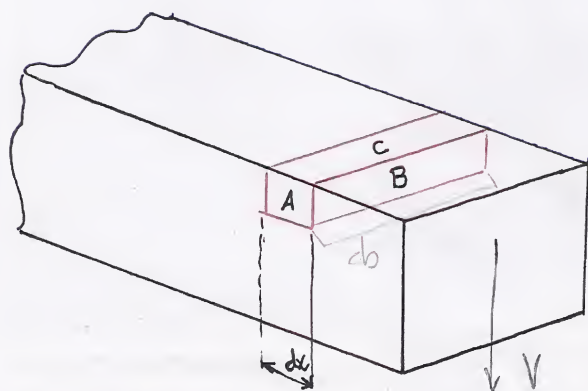


En las paredes exteriores (sup e inferior) no hay esfuerzos

Se deduce que los τ verticales también deben ser
 Cero en estas ubicaciones, $\tau=0$ con $y=\pm h/2$

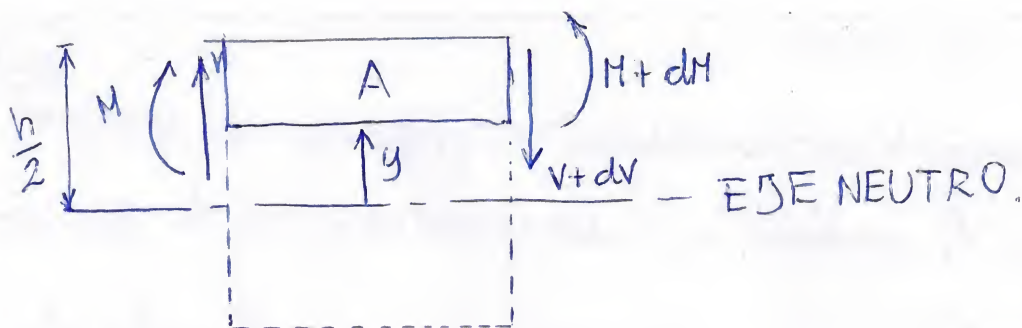
FORMULA DE SOURASKY

- Se considera una viga bajo flexión no uniforme.



Sobre el elemento actúan el M
 y el V

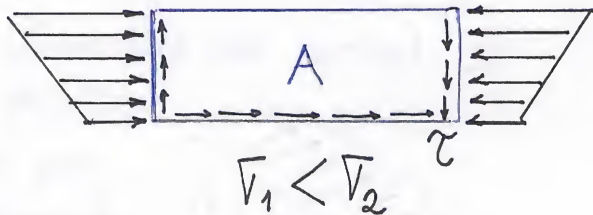
(15)



SE TOMAN EN VALOR ABSOLUTO

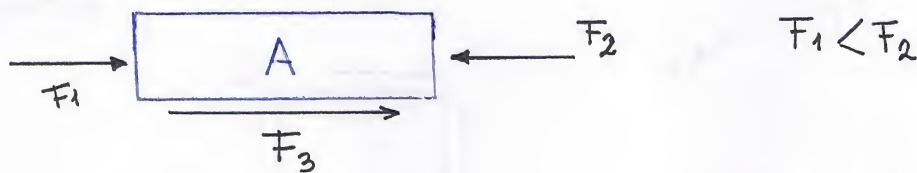
$$\tau_1 = \frac{M \cdot y}{I}$$

$$\tau_2 = \frac{(M + dM) \cdot y}{I}$$



• τ en el inf., por que esta en el interior de la viga. Sobre el elemento NO HAY τ , por ser PARED EXTERNA!

PUESTO COMO FUERZAS



$\frac{dM}{I}$ sale es cto. en cualquier sección transversal dada.

$$F_1 = \int_B \tau_1 \cdot dA = \int_B \frac{M \cdot y}{I} \cdot dA$$

$$F_2 = \int_B \tau_2 \cdot dA = \int_B \frac{(M + dM) \cdot y}{I} \cdot dA = \int_B \frac{M \cdot y}{I} \cdot dA + \int_B \frac{dM \cdot y}{I} \cdot dA$$

$$F_3 = \tau \cdot b \cdot dx \Rightarrow \int_{C'} \tau \cdot dA = \tau \int_{C'} dA = \tau \cdot dx \cdot b$$

$$\sum F = F_1 + F_3 = F_2 = 0$$

$$F_3 = F_2 - F_1$$

$$\tau \cdot b \cdot dx = + \int_B \frac{M \cdot y}{I} \cdot dA + \int_B \frac{dM \cdot y}{I} \cdot dA - \int_B \frac{M \cdot y}{I} \cdot dA$$

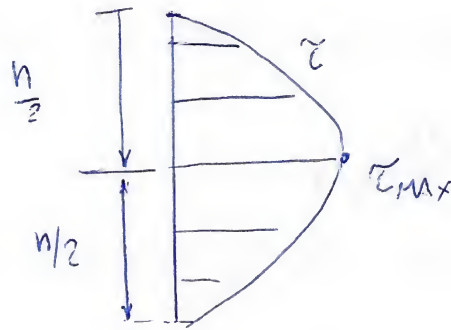
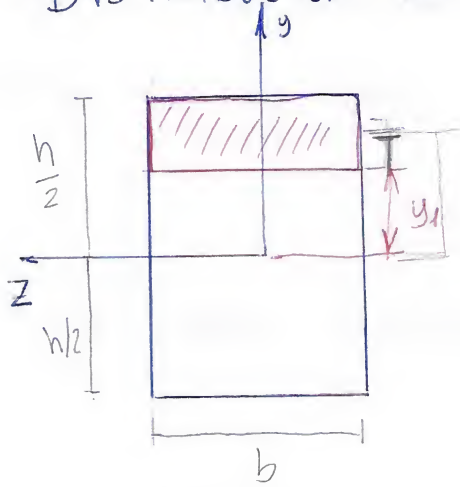
$$\tau \cdot b \cdot dx = \frac{dM}{I} \int_B y \cdot dA$$

$$\tau \cdot b = \frac{dM}{dx} \cdot Q = Q$$

$$\tau = \frac{V \cdot Q}{I \cdot b}$$

DISTRIBUCIÓN DE ESF. CORTANTE

43



$$Q = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y_1 \right) \cdot \left(y_1 + \frac{h/2 - y_1}{2} \right) = b \left(\frac{h}{2} - y_1 \right) \left(y_1 + \frac{h}{4} - \frac{y_1}{2} \right)$$

$$= b \left(\frac{h}{2} - y_1 \right) \left(\frac{h}{4} + \frac{y_1}{2} \right) = b \left(\frac{h^2}{8} + \frac{h \cdot y_1}{4} - \frac{h y_1}{4} - \frac{y_1^2}{2} \right)$$

$$Q = b \left(\frac{h^2}{8} - \frac{y_1^2}{2} \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)$$

$$\tau = \frac{V \cdot Q}{b \cdot I} = \frac{V}{b \cdot I} \cdot \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) = \boxed{\frac{V}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)}$$

→ VARIA CUADRÁTICAMENTE CON y_1

$$\tau(y_1 = \pm \frac{h}{2}) = \frac{V}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{4} \right) = 0$$

$$\tau_{\text{MAX}}(y_1 = 0) = \frac{V}{2I} \left(\frac{h^2}{4} \right) = \boxed{\frac{V \cdot h^2}{8I}}$$

$$\tau_{\text{PROM}} = \frac{V}{A}$$

$$\tau_{\text{MAX}} = \frac{V \cdot h^2}{8I} = \frac{V \cdot h^2}{8 \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} = \frac{12V \cdot h^2}{8b \cdot h^3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{b \cdot h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{A}$$

$$\tau_{\text{MAX}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{V}{A}$$

LIMITADO A!
• VIGA de mat. homogénea LE con deflex. pequeñas

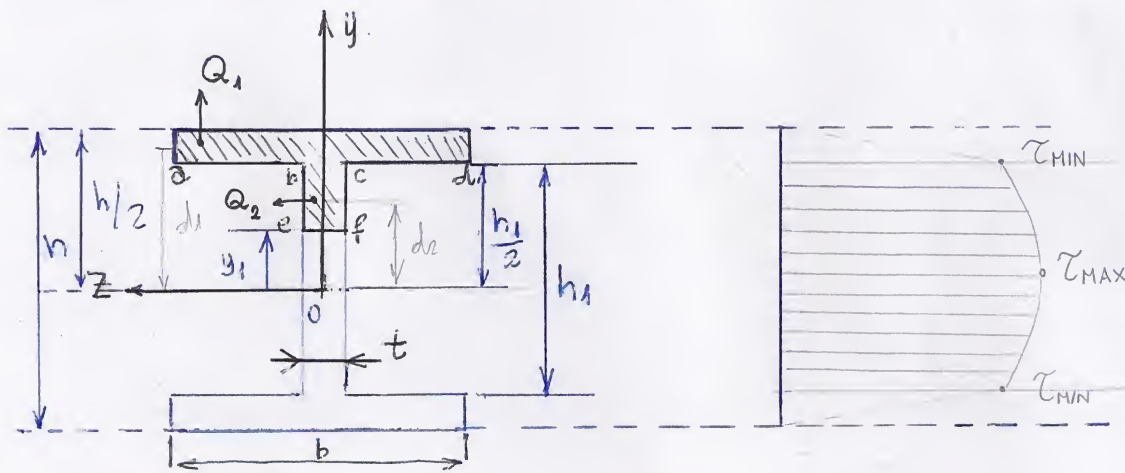
$$\boxed{\tau_{\text{MAX}} = \frac{3V}{2A}}$$

16

Análisis válido para vigas de material LE con deflexiones pequeñas. Para el correcto uso de las fórmulas debe cumplirse que:

- Los bordes de la sección transversal deben ser paralelos al eje y
- Los esfuerzos cortantes deben ser uniformes a través del ancho de la sección transversal.
- válido solo para vigas prismáticas. y los resultados serán más exactos conforme aumente el cociente h/b

ESFUERZOS CORTANTES EN LAS ALMAS DE VIGAS CON PATINES.



- mismos supuestos que en la sección rectangular

$$A_1 = b \left(-\frac{h_1}{2} + \frac{h}{2} \right) = b \left(\frac{h}{2} - \frac{h_1}{2} \right) \quad Q_1 = A_1 \cdot \left(\frac{h}{2} + \frac{\frac{h}{2} - \frac{h_1}{2}}{2} \right)$$

$$A_2 = t \cdot \left(\frac{h_1}{2} - y_1 \right) \quad Q_2 = A_2 \cdot \left(y_1 + \frac{\frac{h_1}{2} - y_1}{2} \right)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$Q_1 = b \left(\frac{h}{2} - \frac{h_1}{2} \right) \cdot \left(\frac{h_1}{2} + \frac{h}{4} - \frac{h_1}{4} \right)$$

$$Q_1 = b \left(\frac{h}{2} - \frac{h_1}{2} \right) \cdot \left(\frac{h_1}{4} + \frac{h}{4} \right)$$

$$Q_1 = \frac{b}{8} (h - h_1) (h_1 + h) = \boxed{\frac{b}{8} (h^2 - h_1^2)}$$

$$h \cdot h_1 + h^2 - h_1^2 - h_1 \cdot h$$

$$Q_2 = t \cdot \left(\frac{h_1}{2} - y_1 \right) \cdot \left(y_1 + \frac{h_1}{4} - \frac{y_1}{2} \right)$$

$$= t \left(\frac{h_1}{2} - y_1 \right) \left(\frac{y_1}{2} + \frac{h_1}{4} \right) = t \left[\cancel{\frac{h_1 y_1}{4}} + \frac{h_1^2}{8} - \frac{y_1^2}{2} - \cancel{\frac{h_1 y_1}{4}} \right]$$

$$= t \left(\frac{h_1^2}{8} - \frac{y_1^2}{2} \right) = \frac{t}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - y_1^2 \right) = \boxed{\frac{t}{8} (h_1^2 - 4 y_1^2)}$$

$$Q_1 + Q_2 = \frac{b}{8} (h^2 - h_1^2) + \frac{t}{8} (h_1^2 - 4 y_1^2) = Q$$

↑ NO cte ("x")

$$\tau = \frac{V \cdot Q}{I \cdot t} = \frac{V}{8 I t} \left[b (h^2 - h_1^2) + t (h_1^2 - 4 y_1^2) \right]$$

$$I = \frac{b h^3}{12} - \frac{(b-t) h_1^3}{12} = \frac{1}{12} (b \cdot h^3 - b \cdot h_1^3 + t \cdot h_1^3)$$

$$\tau_{MAX} = \frac{V}{8 I \cdot t} (b \cdot h^2 - b \cdot h_1^2 + t \cdot h_1^2)$$

$$\tau_{MIN} = \frac{V \cdot b}{8 \cdot I \cdot t} (h^2 - h_1^2)$$

FUERZA A CORTANTE EN EL ALMA.

$$V_{ALMA} = \tau \cdot A \text{ del diagrama de esf. cortante}$$

$$V_{ALMA} = \tau \cdot \left[h_1 \cdot \tau_{MIN} + \frac{2}{3} (h_1) (\tau_{MAX} - \tau_{MIN}) \right]$$
$$= \tau \left[h_1 \cdot \tau_{MIN} + \frac{2}{3} h_1 \cdot \tau_{MAX} - \frac{2}{3} h_1 \cdot \tau_{MIN} \right]$$

$$= \tau \left[\frac{h_1 \tau_{MIN}}{3} + \frac{2}{3} h_1 \tau_{MAX} \right]$$

$$V_{ALMA} = \left[\frac{\tau}{3} h_1 \left(\tau_{MIN} + 2 \tau_{MAX} \right) \right]$$

$$\tau_{PROM} = \frac{V}{t \cdot h_1}$$

VALOR APROX. USADO POR LOS
DISEÑADORES

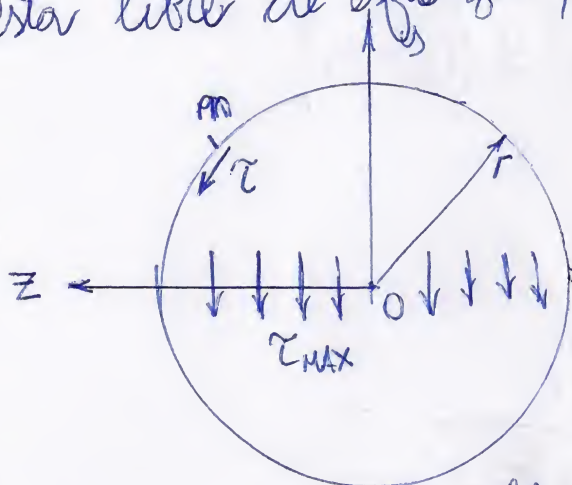
El análisis es adecuado para determinar esfuerzos cortantes verticales en el alma de una viga de patin ancho. Sin embargo, no es válida para analizar los esfuerzos cortantes verticales en los patines al no poder suponer que estos son constantes a través del ancho de las mismas. Por otro lado, las formulas si son eficientes para determinar esfuerzos cortantes actuando horizontalmente.

ESFUERZOS CORTANTES EN VIGAS DE SECCION TRANSV. CIRCULAR

(44')

Ya no se pueden suponer τ paralelos al eje Y.

debe actuar tangente al borde, la sup. exterior
esta libre de esfuerzos, NO puede haber Componente RADIAL.



es facil determinar los ef.
Cortantes en el eje neutro
(donde son máximas). Con
supuestos razonables.

Supongo esfuerzos paralelos al eje "y" y que son de
Intensidad Cte. (MISMO SUPUESTO $\frac{VQ}{Ib} = \tau$)

necesito saber

$$I = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$$

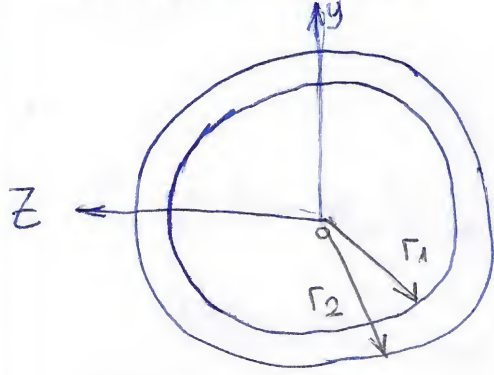
$$\frac{\pi \cdot r^3 \cdot 4r^2}{36\pi} = \frac{r^3 \cdot 2}{3}$$

$$Q = A \cdot \bar{y} = \left(\frac{\pi \cdot r^2}{2} \right) \left(\frac{4r}{3\pi} \right) = \frac{2r^3}{3} \quad \boxed{b = 2r}$$

$$\begin{aligned} \tau_{MAX} &= \frac{VQ}{Ib} = \frac{V \cdot \left(\frac{2r^3}{3} \right)}{\frac{\pi \cdot r^4}{4} \cdot 2r} = \frac{V \cdot \frac{2r^3}{3}}{\frac{\pi \cdot r^5}{2}} = \\ &= V \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{\pi r^2} = \frac{V \cdot 4}{3\pi r^2} = \boxed{\frac{4}{3} \cdot \frac{V}{A}} \end{aligned}$$

A. de secc. transversal!

SI FUESE HUECA



supongo de nuevo lo mismo
esfuerzos paralelos a y y uniformemente
distribuidos.

$$I = \frac{\pi}{4} (r_2^4 - r_1^4)$$

$$b = 2(r_2 - r_1)$$

$$Q = \frac{2}{3} (r_2^3 - r_1^3)$$

$$\tau_{\max} = \frac{V \cdot Q}{I \cdot b} = \frac{V \cdot \frac{2}{3} \cdot (r_2^3 - r_1^3)}{\frac{\pi}{4} (r_2^4 - r_1^4) \cdot 2(r_2 - r_1)} =$$

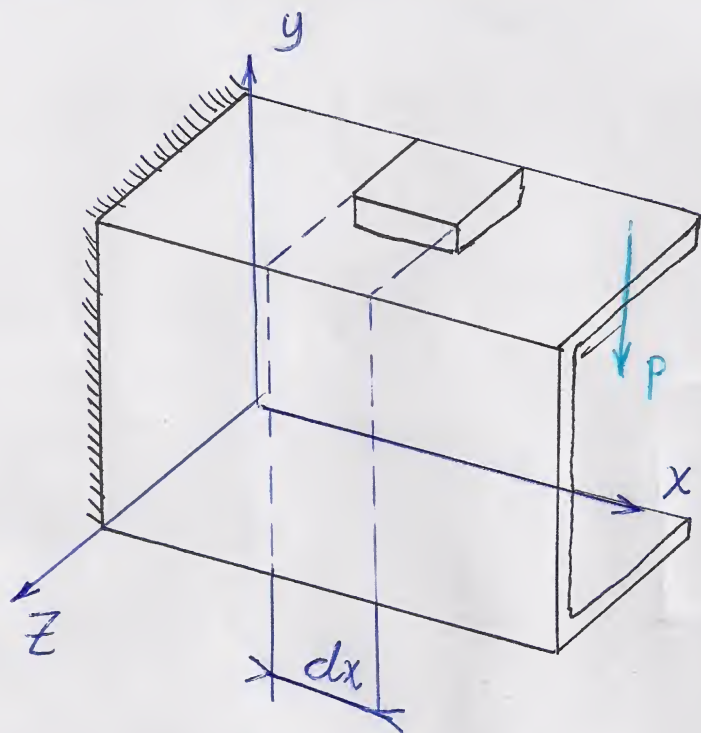
$$= \frac{V \cdot \cancel{2} (r_2^3 - r_1^3) \cdot 4}{\pi (r_2^4 - r_1^4) \cdot 3 \cdot \cancel{2} (r_2 - r_1)} = \boxed{\frac{4}{3A} \left(\frac{r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2}{r_2^2 + r_1^2} \right)}$$

$$\boxed{A = \pi (r_2^2 - r_1^2)}$$

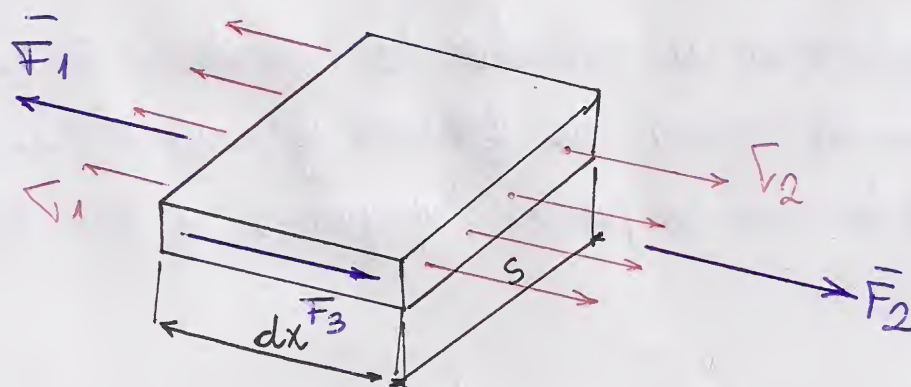
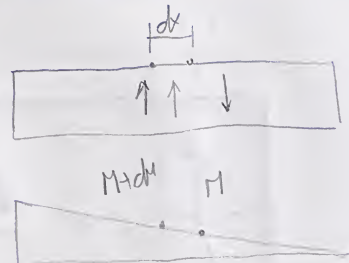
FLUJO CORTANTE

(45)

Se define como la fuerza cortante horizontal por unidad de longitud a lo largo del eje longitudinal. El concepto es utilizado para obtener las fuerzas cortantes horizontales que actúan entre las partes de vigas armadas.



el sentido de τ se saca con el diagrama de momentos



$$\tau_1 > \tau_2$$

$$F_1 > F_2$$

$$F_1 = F_3 + F_2$$

$$\tau_1 = \frac{(M + dm) y}{I}$$

$$\tau_2 = \frac{M y}{I}$$

VALORES ABSOLUTOS

$$F_1 = \int_A \tau_1 \cdot dA =$$

$$F_2 = \int_A \tau_2 \cdot dA$$

$$F_3 = F_1 - F_2$$

$$F_3 = \int \frac{dM}{I} \cdot y \, dA + \cancel{\int \frac{M \cdot I}{y} \, dA} - \int \frac{M \cdot I}{y} \, dA$$

$$F_3 = \frac{dM}{I} \underbrace{\int y \, dA}_{Q_x}$$

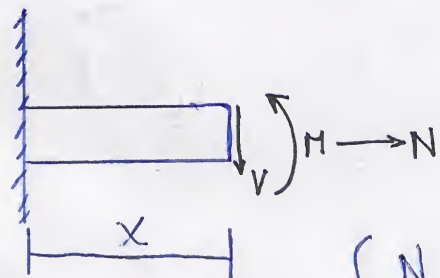
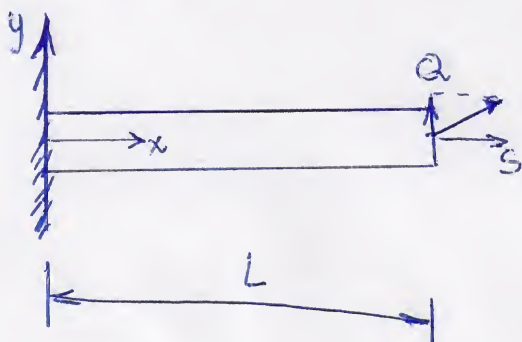
$$F_3 = \frac{dM \cdot Q_x}{I}$$

$$\frac{F_3}{dx} = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{Q}{I}$$

$$\boxed{f = \frac{V \cdot Q}{I}}$$

VIGAS CON CARGAS AXIALES

elementos estructurales a menudo se someten a la acción simultánea de cargas de flexión y cargas axiales. Los esfuerzos combinados se pueden superponer y así obtenerlos



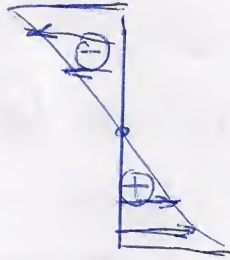
$$\begin{cases} N = P_x \\ V = -P_y \\ M = P_y(L-x) \end{cases}$$

N y M producen esfuerzos normales.

$\hookrightarrow \sigma = \frac{N}{A} \rightarrow \sigma = -\frac{M \cdot y}{I}$ (Compresión arriba, tracción abajo (+)) (46)

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M \cdot y}{I}$$

$N \rightarrow$ positiva en tracción!



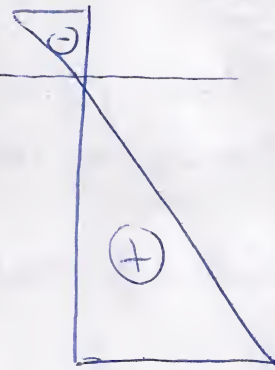
3 casos posibles (Ej con $N(+)$ y $M(+)$)



$\sigma_M < \sigma_N$



$\sigma_M = \sigma_N$

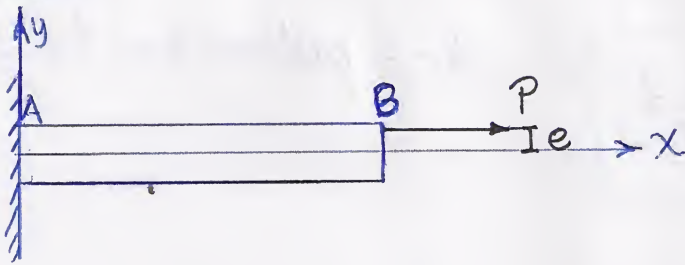


$\sigma_M > \sigma_N$

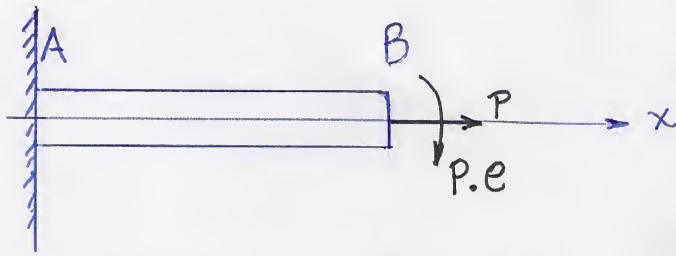
Si es de compresión N , o M está en otro sentido
Cambiará de manera correspondiente. el eje neutro
se desplazará al actuar N y M .

CARGAS AXIALES EXCENTRICAS

N. no actua en el Centruide de la seccion transversal.



e se denomina excentricidad de la carga.



$$-P.e = M$$

se comporta como una viga sometida a momento y carga axial.

$$\bar{V} = \frac{P}{A} + \frac{\overset{M}{P.e.y}}{I}$$

I es el Momento de inercia con el eje Z.
 A es el area de la seccion transversal

La posicion del eje neutro se determina con $\bar{V} = 0$

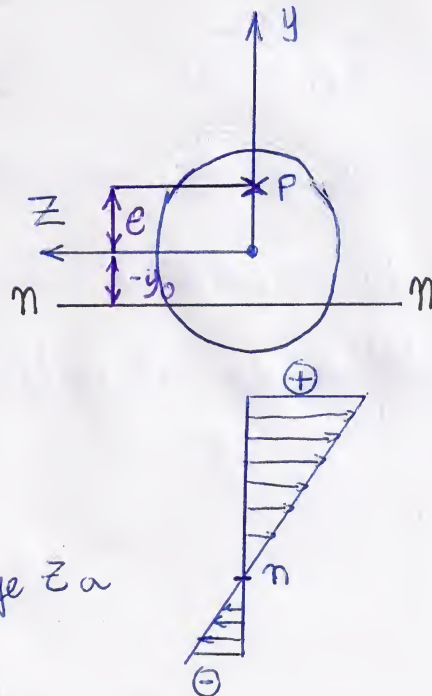
$$\bar{V} = \frac{P}{A} + \frac{P.e.y}{I}$$

$$0 = \frac{P}{A} + \frac{P.e.y}{I}$$

$$-\frac{P}{A} = \frac{P.e.y}{I}$$

$$\boxed{-\frac{I}{A.e} = y_0}$$

\hookrightarrow desde el eje Z a el n-n



- Si $e = 0$; la Carga que actúa en el Centróide de área de la sección transversal de la viga, el eje neutro está a una distancia infinita y la distribución de esfuerzos es uniforme. (Existe solo carga axial)
- Si $e \rightarrow \infty$, la Carga actúa a una distancia infinita, el eje neutro pasa por el Centróide de área de la sección transversal de la viga (eje Z) y la distribución de esfuerzos es la misma que en flexión pura.

Se limita a que se deben usar las dimensiones originales de la viga, al determinar el M_f , es decir, antes de que ocurran deformaciones o deflexiones. Esto es siempre que las vigas sean relativamente rígidas en flexión, es decir, con deflexiones muy pequeñas; la viga debe ser robusta para no considerar efectos de pandeo.

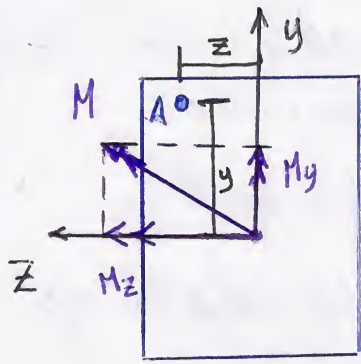
PRACTICAMENTE es robusta $\frac{l}{h} \leq 10$ para ser robusta.

VIGAS DOBLEMENTE SIMÉTRICAS CON CARGAS INCLINADAS

Vigas sometidas a Cargas que no actúan en el plano de simetría, Cargas inclinadas.

Se limita el ensayo a secciones doblemente simétricas además las Cargas actúan en el Centróide.

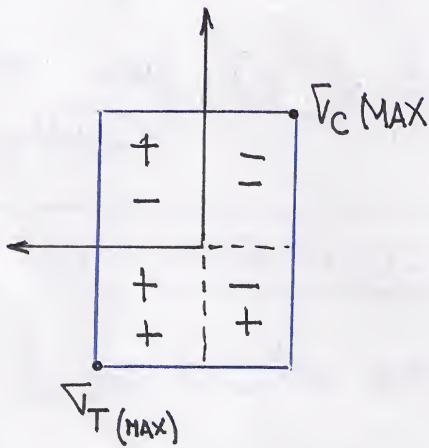
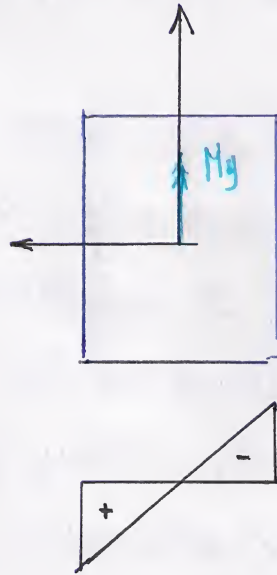
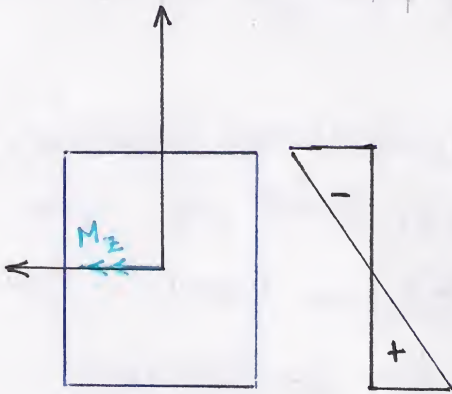
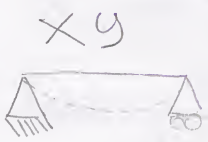
σ de M_y y M_z se calcula a partir de la fórmula de flexión.



$$\sigma_x = \frac{M_y \cdot z}{I_y} - \frac{M_z \cdot y}{I_z}$$

UNA COMPRESIÓN

UNA TRACCIÓN



EJE NEUTRO

$$\sigma_x = 0$$

$$\frac{M_y \cdot z}{I_y} - \frac{M_z \cdot y}{I_z} = 0$$

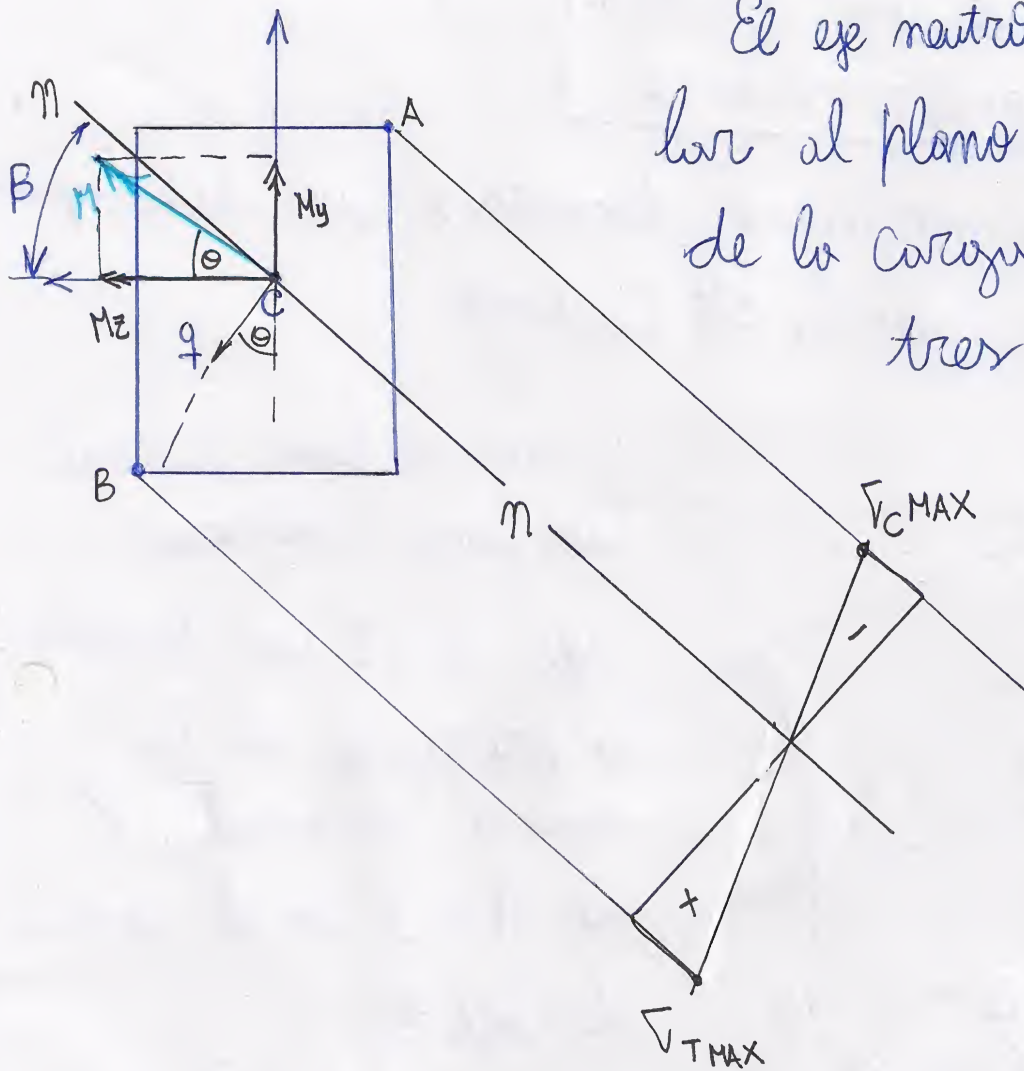
$$\tan(\beta) = \frac{y}{z} = \frac{M_y \cdot I_z}{M_z \cdot I_y}$$

$$\rightarrow \tan \beta = \frac{M \cdot \sin \theta \cdot I_z}{M \cdot \cos \theta \cdot I_y}$$

$$\frac{M_y}{M_z} = \tan(\theta)$$

$$\tau_{xy}(\beta) = \tau_{xy}(\theta) \cdot \frac{I_z}{I_y}$$

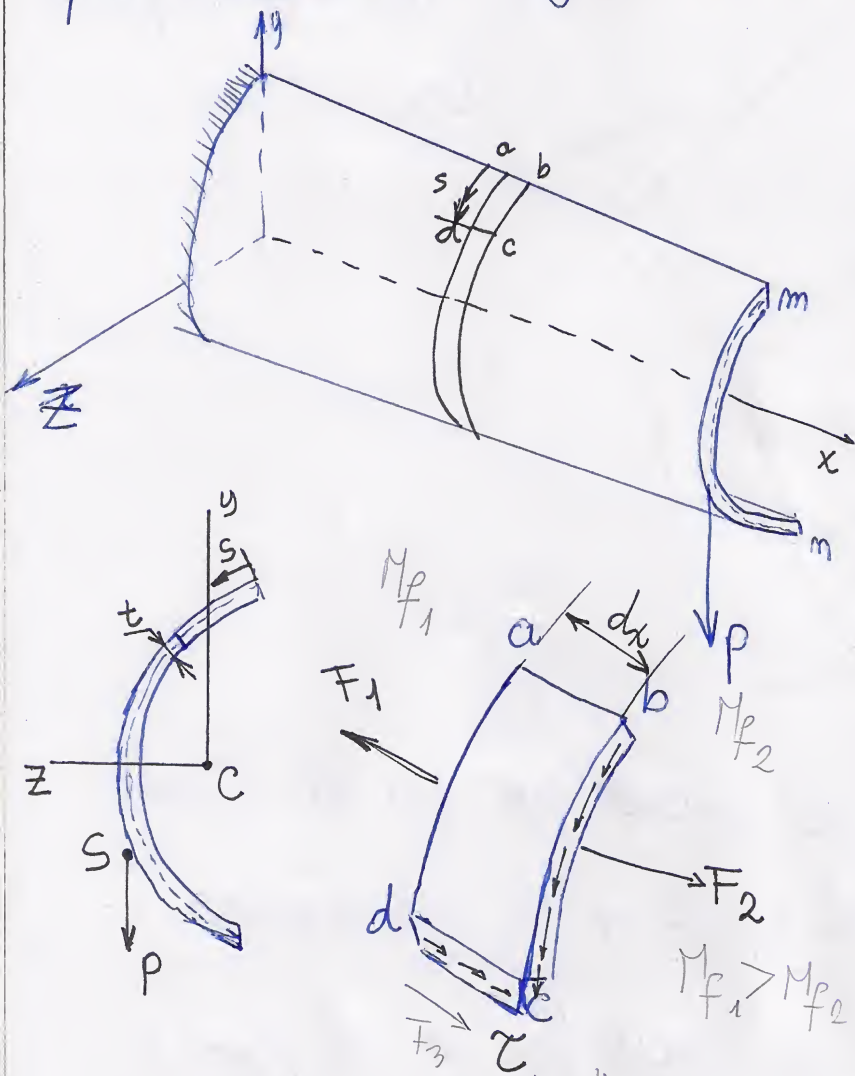
El eje neutro no es perpendicular al plano longitudinal de la carga salvo en tres casos excepcionales.



- 1) Cuando la carga se encuentra en el plano XY ($\theta = 0$ ó π), el eje Z es el eje neutro.
- 2) Cuando la carga se encuentra en el plano XZ ($\theta = \pm \pi/2$) el eje Y es el neutro.
- 3) Cuando los momentos principales de inercia I_z e I_y son iguales.

ESFUERZOS CORTANTES EN VIGAS CON SECCIONES TRANSV. ABIERTAS DE PARED DELGADA

Se usaron las mismas técnicas que utilizamos para deducir la fórmula de Cortante.



m-m. línea Central
Con forma arbitraria.

es y y z son los ejes
principales de la
sección transversal, P
es || a y. en el centro
de Corte "S".

(flexión en el XY). (Z es neutro)

NO VABS

$$\sigma_x = - \frac{M_z \cdot y}{I_z}$$

$M_z = M_{inf.}$ con resp. a "Z"

y = Coord del punto en consideración

Se toma abcd y se aisla

$$F_1 > F_2$$

Se equilibra en cd.

$$\sum F_x = \tau \cdot t \cdot dx + F_2 - F_1 = 0$$

$$\tau \cdot t \cdot dx = F_1 - F_2$$

$$F_1 = \int_0^S \nabla_x \cdot dA = \int_0^S -\frac{M_{z1} \cdot y}{I_z} \cdot dA = -\frac{M_{z1}}{I_z} \int_0^S y \cdot dA$$

$$\nabla_x = -\frac{M_{z1}}{I_z} y$$

$$F_2 = \int_0^S \nabla_x \cdot dA = -\frac{M_{z2}}{I_z} \int_0^S y \cdot dA$$

$$\nabla_x = -\frac{M_{z2}}{I_z} y$$

Y es una coordenada para el elemento dA

$$\tau \cdot t \cdot dx = -\frac{M_{z1}}{I_z} \int_0^S y \cdot dA + \frac{M_{z2}}{I_z} \int_0^S y \cdot dA$$

es la razón de cambio
 $\frac{dM}{dx}$

$$\tau \cdot t \cdot dx = \int_0^S y \cdot dA \cdot \left(\frac{M_{z2}}{I_z} - \frac{M_{z1}}{I_z} \right)$$

$$\tau = \int_0^S y \cdot dA \cdot (M_{z2} - M_{z1}) \cdot \frac{1}{dx \cdot t \cdot I_z}$$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{M_{z2} - M_{z1}}{dx} =$$

$$= V_y$$

$$\tau = \int_0^S y \cdot dA \cdot \left(\frac{M_{z2}}{dx} - \frac{M_{z1}}{dx} \right) \cdot \frac{1}{I_z \cdot t}$$

$$\tau = \frac{V_y}{I_z \cdot t} \int_0^S y \cdot dA$$

MOMENTO ESTÁTICO CON RESPECTO A "Z"

$$\tau = \frac{V_y \cdot Q_z}{I_z \cdot t}$$

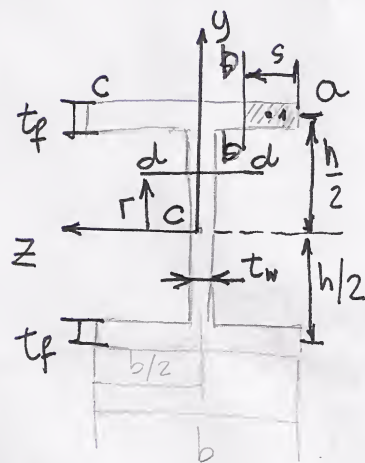
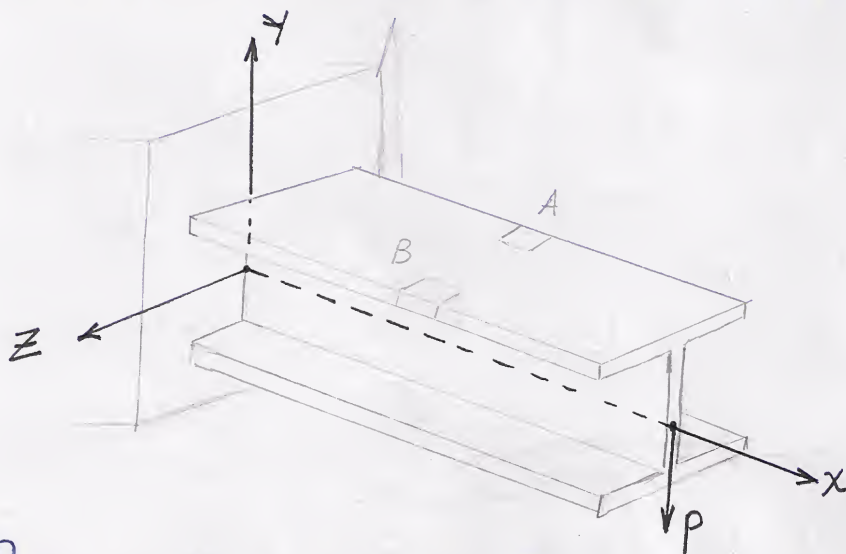
$$\text{si } t \cdot \tau = f = \frac{V_y \cdot Q_z}{I_z}$$

Si la carga actúa paralela al eje z por S
se cambian los subíndices " z " por " y ", y viceversa

$$\tau = \frac{V_z \cdot Q_y}{I_y \cdot t}$$

$$f = \frac{V_z \cdot Q_y}{I_y}$$

ESFUERZOS CORTANTES EN VIGAS DE PATIN ANCHO.

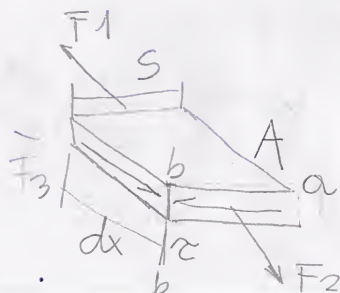


Actúa en el Centro del alma, en el Centro de Corte.

ESFUERZOS CORTANTES EN EL PATIN SUP.

$$Q_z = s \cdot t_f \cdot \frac{h}{2}$$

$$\tau_f = \frac{V_y \cdot Q_z}{I_z \cdot t} = \frac{P \cdot (s \cdot t_f \cdot h/2)}{I_z \cdot t_f} = \frac{P \cdot s \cdot h}{2 I_z}$$



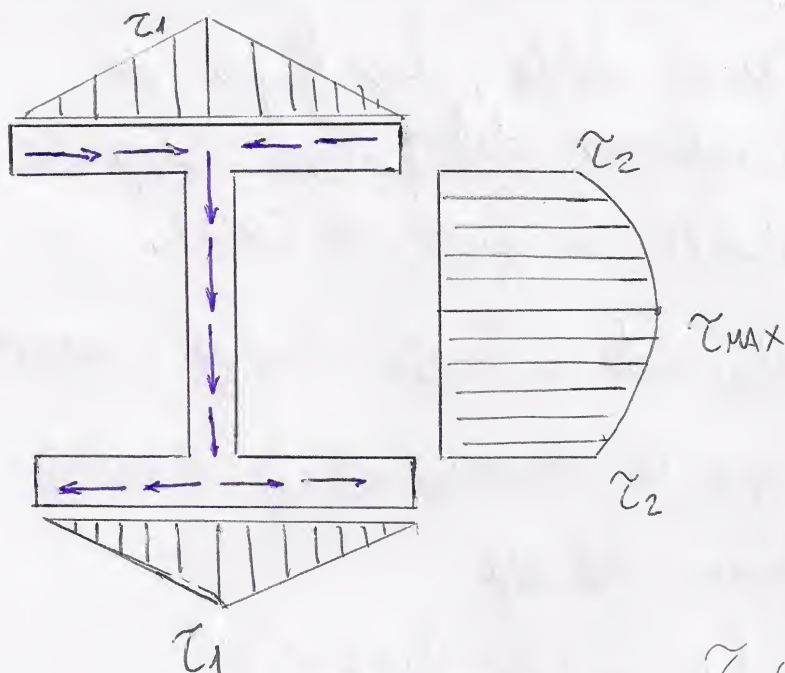
elemento.

$$F_1 > F_2$$

Como es así

es necesario

que VAYAN
A LA IZQ.



es 0 en a ($s=0$)

es máximo en ($s=\frac{b}{2}$)

$$\tau_1(s=\frac{b}{2}) = \frac{b \cdot h \cdot P}{4 I_z}$$

$$f_1 = \tau_1 \cdot t_f = \frac{b \cdot h \cdot P \cdot t_f}{4 I_z}$$

ESFUERZOS CORTANTES EN EL ALMA

Consideramos un corte horizontal en la parte superior del alma. (unión entre patín y alma).

$$Q_z = b \cdot t_f \cdot \frac{h}{2}$$

$$\tau_2 = \frac{b \cdot h \cdot t_f \cdot P}{2 I_z \cdot t_w}$$

$$f_2 = \tau_2 \cdot t_w = \frac{b \cdot h \cdot t_f \cdot P}{2 I_z}$$

$$f_2 = 2 f_1$$

Es esperable que sea el doble, los flujos de corte de las dos mitades del patin sup. se combinan para producir el flujo de corte.

En el alma el corte actua hacia abajo, aumentam su magnitud hasta que se alcanza el eje neutro. en d-d a r distancia del eje.

$$Q_z = \frac{b \cdot t_f \cdot h}{2} + \left(\frac{h}{2} - r \right) (t_w) \left(\frac{h/2 + r}{2} \right)$$

$$= \frac{b \cdot t_f \cdot h}{2} + \frac{t_w}{2} \left(\frac{h^2}{4} - r^2 \right) \checkmark$$

$$\tau_w = \left(\frac{b \cdot t_f \cdot h}{t_w} + \frac{h^2}{4} - r^2 \right) \frac{P}{2 I_z}$$

Con $r = \frac{h}{2}$ se reduce a τ_2

$$\text{Con } r = 0 \rightarrow \tau_{\max} = \left(\frac{b \cdot t_f}{t_w} + \frac{h}{4} \right) \frac{P \cdot h}{2 I_z}$$

La variacion en el alma es parabolico, no es constante. RAZON τ_{\max} / τ_2

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau_2} = 1 + \frac{h t_w}{4 b t_f}$$

La fuerza vertical R de los esfuerzos cortantes en el alma de la viga ~~donde~~ (los esfuerzos horizontales en los patines no producen resultante). $dA = \underline{dr} \cdot t_w$

$$R = \int \tau \cdot dA = 2 \int_0^{h/2} \tau \cdot t_w \cdot dr$$

DOS MITADES

$$R = 2 t_w \int_0^{h/2} \left(\frac{P}{2 I_z} \right) \left(\frac{b \cdot t_f \cdot h}{t_w} + \frac{h^2}{4} - r^2 \right) \cdot dr$$

$$R = \frac{P \cdot t_w}{I_z} \left[\int_0^{h/2} \frac{b \cdot t_f \cdot h}{t_w} \cdot dr + \int_0^{h/2} \frac{h^2}{4} \cdot dr - \int_0^{h/2} r^2 \cdot dr \right]$$

$$R = \frac{P \cdot t_w}{I_z} \left[\left(\frac{r \cdot b \cdot t_f \cdot h}{t_w} \right) \Big|_0^{h/2} + \left(\frac{h^2 \cdot r}{4} \right) \Big|_0^{h/2} - \left(\frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^{h/2} \right]$$

$$R = \frac{P \cdot t_w}{I_z} \cdot \left(\frac{b \cdot t_f \cdot h^2}{2 t_w} + \frac{h^3}{8} - \frac{h^3}{24} \right)$$

$$R = \frac{P \cdot t_w}{I_z} \left(\frac{b \cdot t_f \cdot h^2}{2 t_w} + \frac{h^3}{12} \right)$$

$$R = \frac{P}{I_z} \left(\frac{b \cdot t_f \cdot h^2}{2} + \frac{h^3 \cdot t_w}{12} \right)$$

Si reemplazo I por queda

$$R = P.$$

Con todo la resultante es dep. en el alma.

$$I_z = \frac{t_w \cdot h^3}{12} + \frac{2 \cdot b \cdot t_f \cdot h^2}{2^2} = \frac{t_w \cdot h^3}{12} + \frac{b \cdot t_f \cdot h^2}{2}$$

POR
TEOREMA DE
STAINER

Si despreciamos el espesor de las alas al ser sus espesores muy pequeños y estar encimados al cubo, (t_f^3) . al sustituir I_z en la ecuación R . obtenemos que $R \approx P$. Esto quiere decir que prácticamente todo el esfuerzo de corte es soportado por el alma.

CENTRO DE CORTE EN SECCIONES ABIERTAS DE PARED DELGADA.

• Solo se consideran las vigas con secciones transversales con un eje de simetría o asimétricas. (el centro de corte en una viga doblemente simétrica está en el Centroides).
c).

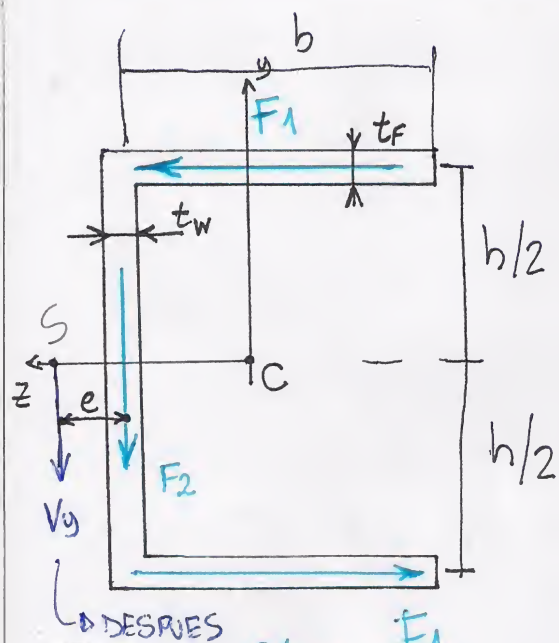
El procedimiento consta de dos pasos.

1º) evaluar los esfuerzos cortantes que actúan sobre la sección transversal cuando ocurre la flexión con respecto a uno de los ejes principales.

2º). Determinar la resultante de estos esfuerzos. El Centro de corte se ubica en la línea de acción de la Resultante. Si considero dos ejes principales, puedo det. su posición.

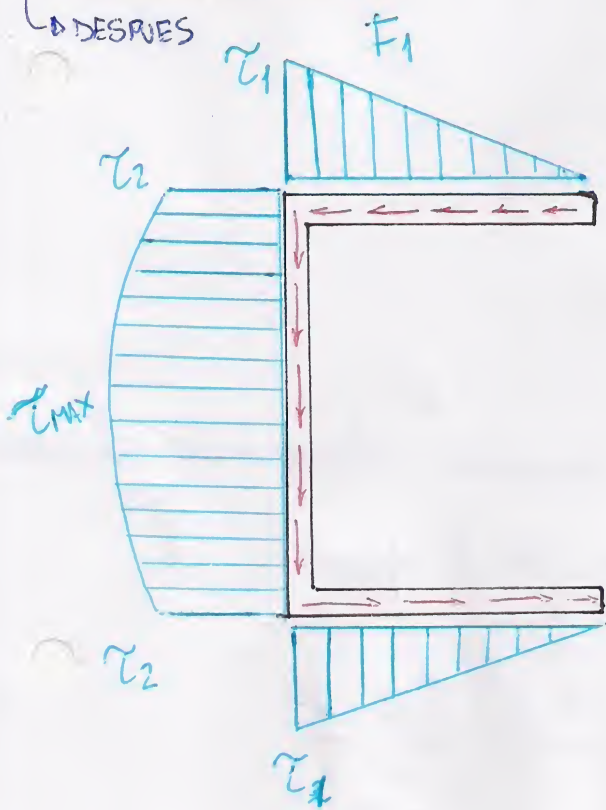
SECCIONES DE CANAL.

(52)



- 1 eje de simetría. Z . el Centro c. se ubica sobre el eje.
- Suponemos flexión sobre Z . (eje N), determinamos $V_y \parallel "y"$

determinamos τ_1 en el patín, τ_2 en el alma (sup) y τ_{MAX} .



$$Q_z = b \cdot t_f \cdot \frac{h}{2}$$

$$\tau_1 = \frac{V_y \cdot Q_z}{I_z \cdot t_f} = \frac{V_y \cdot b \cdot t_f \cdot \frac{h}{2}}{I_z \cdot t_f}$$

$$\tau_1 = \frac{V_y \cdot b \cdot h}{2 I_z}$$

τ_2 en la parte superior del alma se obtiene de forma similar. t_f Cambia por t_w

$$Q = b \cdot t_f \cdot \frac{h}{2}$$

$$\tau_2 = \frac{V_y \cdot b \cdot t_f \cdot \frac{h}{2}}{I_z \cdot t_w}$$

$$\tau_2 = \frac{V_y \cdot b \cdot t_f \cdot h}{2 \cdot I_z \cdot t_w}$$

Q_z en el eje neutro.

$$Q_z = b \cdot t_f \cdot \frac{h}{2} + \frac{h}{2} \cdot t_w \cdot \left(\frac{h}{4}\right)$$

$$Q_z = \frac{h}{2} \left(b \cdot t_f + \frac{t_w \cdot h}{4} \right)$$

$$\tau_{MAX} = \frac{V_y \cdot Q_z}{I_z \cdot t_w} = \frac{V_y}{I_z} \cdot \frac{h}{2} \left(b \cdot t_f + \frac{t_w \cdot h}{4} \right)$$

$$\tau_{MAX} = \left(\frac{b \cdot t_f}{t_w} + \frac{h}{4} \right) \frac{h \cdot V_y}{2 I_z}$$

Las fuerzas en los patines (F_1) se encuentran obteniendo el área del triángulo de esfuerzos multiplicado por el espesor.

$$F_1 = \left(\frac{\tau_1 \cdot b}{2} \right) (t_f) = \frac{h \cdot b^2 \cdot t_f \cdot V_y}{4 I_z}$$

$$F_2 = V_y \quad (\text{los patines no influyen})$$

F_2 lo determinamos calculando el área

$$A = \tau_2 \cdot h + \frac{2}{3} (\tau_{MAX} - \tau_2) \cdot h$$

$$F_2 = \tau_2 \cdot h \cdot t_w + \frac{2}{3} (\tau_{MAX} - \tau_2) \cdot h \cdot t_w$$

Substituye para $\tau_2 \times \tau_{MAX}$

$$\triangleright I_z = \frac{tw^3}{12} + \frac{b \cdot h^2 \cdot t_f}{2} \quad (53)$$

$$F_2 = \left(\frac{tw \cdot h^3}{12} + \frac{b \cdot h^2 \cdot t_f}{2} \right) \frac{V_y}{I_z}$$

$$\sum M_S = F_1 \cdot h - F_2 \cdot e = 0$$

$$F_1 \cdot h = F_2 \cdot e$$

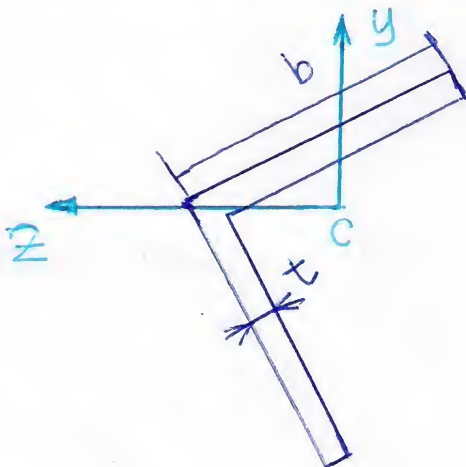
$$e = \frac{F_1 \cdot h}{F_2}$$

$$e = \frac{b^2 \cdot h^2 \cdot t_f}{4 I_z}$$

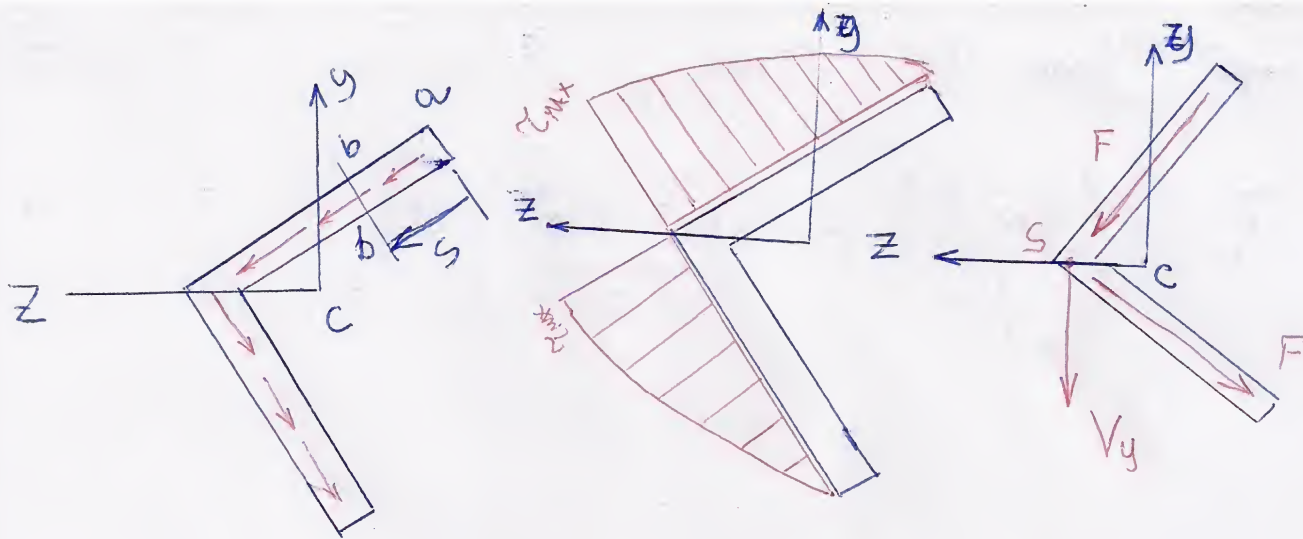
POSICIÓN
DEL
CENTRO
DE
CORTE

$$e = \frac{3b^2 t_f}{h \cdot t_w + 6bt_f}$$

SECCIÓN DE ÁNGULO.



se considera una sección en ángulo con lados iguales. Cada lado mide b y tiene espesor t ; el eje z es de simetría. El origen se ubica en el Centroide C ; el eje " y " y " z " son ejes Centroidales principales



Se siguen los pasos anteriores. Se supone que esta sometida a $V_y \parallel y$

$$Q = A \cdot d = (s \cdot t) \cdot \left(\frac{b - s/2}{\sqrt{2}} \right)$$

Substituyo

$$\tau = \frac{V_y \cdot Q_z}{I_z \cdot t} = \frac{V_y \cdot s}{I_z \cdot \sqrt{2}} \left(b - \frac{s}{2} \right)$$

$$I_z = 2 \left(\frac{t \cdot b^3}{6} \right) = \frac{t b^3}{3}$$

sale de tabla.

$$\tau = \frac{V_y \cdot s}{\frac{t \cdot b^3}{3} \cdot \sqrt{2}} \left(b - \frac{s}{2} \right) = \frac{3 V_y \cdot s}{b^3 \cdot t \cdot \sqrt{2}} \left(b - \frac{s}{2} \right)$$

el esfuerzo cortante a lo largo del ángulo, varía Cuadráticamente con S.

τ_{MAX} es con $S = b$

$$\tau_{MAX} = \frac{3 V_y \cdot b}{b^3 \cdot t \cdot \sqrt{2}} \left(b - \frac{b}{2} \right)$$

$$\tau_{MAX} = \frac{3 V_y}{b^2 \cdot t \cdot \sqrt{2}} \left(\frac{b}{2} \right) = \frac{3 \cdot V_y}{2 \cdot t \cdot b \cdot \sqrt{2}}$$

La fuerza F en cada lado es igual al área del diagrama parabólico multiplicado por el espesor

$$F = \frac{2}{3} \cdot (\tau_{MAX} \cdot b) \cdot t = \frac{2}{3} \cdot \frac{3 \cdot V_y}{2 \cdot t \cdot b \cdot \sqrt{2}} \cdot (b \cdot t) = \frac{V_y}{\sqrt{2}}$$

Solo sobreviven las Componentes verticales, Cada 59'
Componente vale $F/\sqrt{2} \text{ o } V_y/2$; la Resultante vertical
es igual a la fuerza Cortante V_y . La fuerza resultante
pasa por el punto de intersección de las líneas
de acción de dos fuerzas F . En la unión de
los dos lados del ángulo se ubicará el centro de
Cortante.

MECANICA DE LAS ESTRUCTURAS

2^{da} PARTE

(54)

Es fundamental no confundir a los esfuerzos con vectores. (se usan flechas para su representación pero no se pueden adicionar con el principio del paralelogramo).

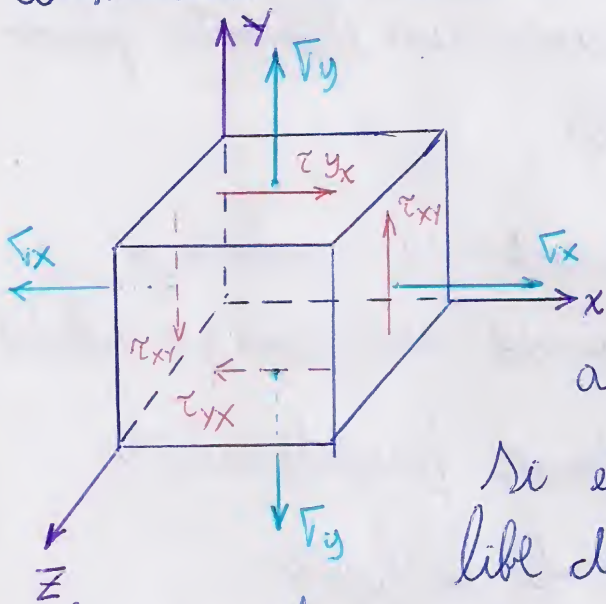
En matemática se denominan TENSORES. (otros tensores en mecánica son las deformaciones y los momentos de inercia).

UNIDAD VI

ESFUERZO PLANO Ó ESTADO PLANO. (7.2).

El análisis de barras en tracción, compresión, ejes en torsión y vigas en flexión; son ejemplos de el llamado esfuerzo plano.

Consideremos un elemento de esfuerzo infinitesimal:



Cuando el material está en esfuerzo plano, en el plano XY , solo las caras "X" e "Y" están sometidas a esfuerzos y todos actúan paralelos a los ejes XY .

Si el elemento está en la superficie libre de un cuerpo, el eje Z es normal a la superficie y la cara Z está en el plano de la superficie.

✓ ESFUERZO NORMAL (sobre x , σ_x y sobre y , σ_y) son iguales y opuestos, por ser elemento infinitesimal

TRACCIÓN POSITIVA Y COMPRESIÓN NEGATIVA.

τ tiene dos subíndices, el primero denota la cara sobre la cual actúa, y el segundo en la dirección.

Ej: τ_{xy} ; actúa sobre la cara "x" y en la dirección del eje "y".

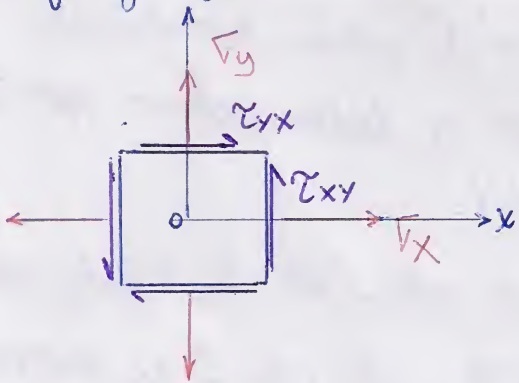
El τ es positivo, cuando actúa sobre una cara positiva, y en la dirección positiva de un eje.

"Un esfuerzo τ es positivo cuando las direcciones asociadas a sus subíndices son (mas-mas) o menos-menos es negativo cuando son mas-menos y menos-mas."

Son iguales por reciprocidad

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

es mejor a veces visualizarlo como un elemento plano de esfuerzo, (elemento bidimensional).



el elemento sin embargo sigue siendo un cuerpo sólido

Con espesor perpendicular

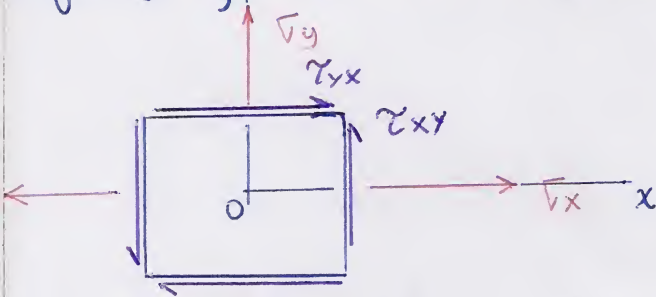
al plano de la figura.

al no tener esfuerzos sobre z se puede dibujar de manera bidimensional.

ESFUERZOS SOBRE SECC. INCLINADAS

55

Conociendo σ_x , σ_y y τ_{xy} podemos conocer los esfuerzos sobre planos inclinados.

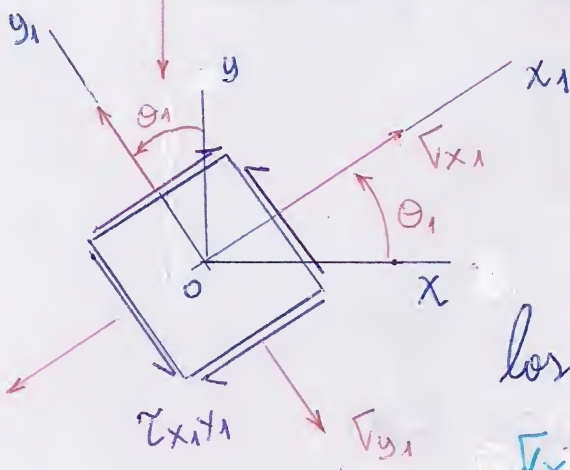


asociados a este nuevo elemento se tienen los ejes X_1, Y_1, Z_1 , tales que Z_1 coincide con el eje Z .

y X_1, Y_1 están girados en

sentido contrario a las agujas del reloj un ángulo θ con respecto a XY .

los nuevos esfuerzos se denotan como $\sigma_{x_1}, \sigma_{y_1}$ y $\tau_{x_1 y_1}$

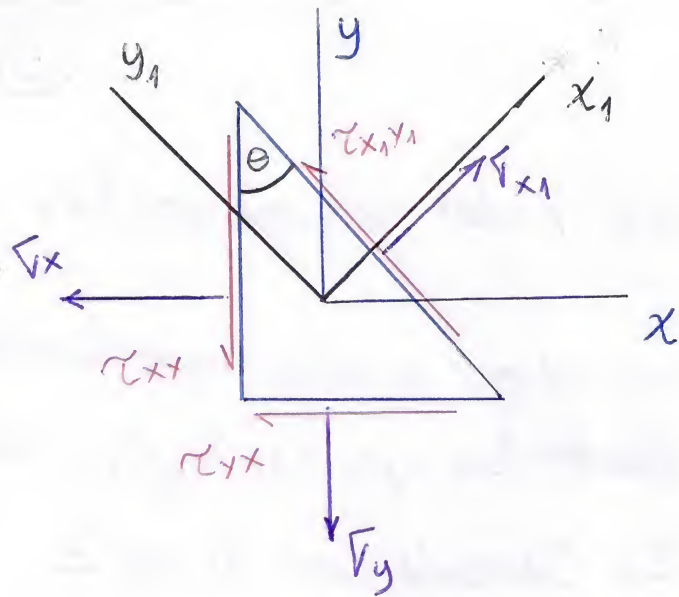


$\tau_{x_1 y_1} = \tau_{y_1 x_1}$ Los esfuerzos cortantes que actúan sobre

los cuatro lados de un elemento en esfuerzo plano se conocen si determinamos el esfuerzo cortante que actúa sobre cualquiera de los lados.

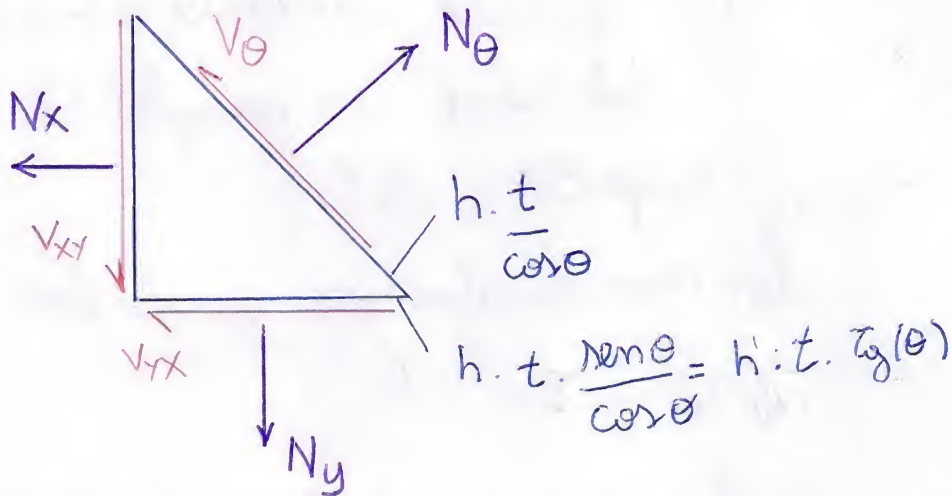
Se toma un elemento de esfuerzo en forma de Cuña. Se busca la relación entre los XY y $X_1 Y_1$.

Se plantean ec. de equilibrio para la Cuña.



para transformar los esfuerzos en fuerzas los multiplico por sus areas

"exceso t y altura h "



$$h \cdot t \cdot \frac{N_{\theta} \sin \theta}{\cos \theta} = h \cdot t \cdot \tau_{\theta}(\theta)$$

$$N_x = \sigma_x \cdot h \cdot t$$

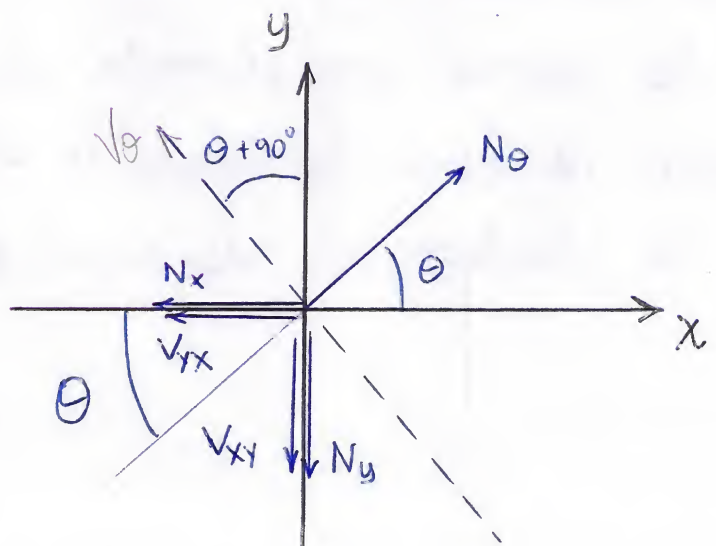
$$V_{xy} = h \cdot t \cdot \tau_{xy}$$

$$V_{yx} = \tau_{yx} \cdot h \cdot t \cdot \tan \theta$$

$$N_y = \sigma_y \cdot h \cdot t \cdot \tan \theta$$

$$N_{\theta} = \sigma_{\theta} \cdot \frac{h \cdot t}{\cos \theta}$$

$$V_{\theta} = \tau_{\theta} \cdot \frac{h \cdot t}{\cos \theta}$$



$$\Sigma F_{y_1} = -\sigma_y \cdot h \cdot t \cdot \tan \theta \cdot \cos \theta + \tau_{xy} \cdot h \cdot t \cdot \tan \theta \cdot \sin \theta = 0$$

$$\tau_{x_1 y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

EQ. DE TRANSFORMACIÓN

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\sigma_{y_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x_1 y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} = \sigma_x + \sigma_y$$

INVARIANTE
DE
TENSIONES

CIRCULO DE MOHR

a

b

(56')

1)

$$\sigma_{x_1} - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right) = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x_1 y_1} = - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

ELEVO AL CUADRA DO

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \sigma_{\text{PROM}} ; R^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$(\sigma_{x_1} - \sigma_{\text{PROM}})^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \cos^2 \theta + 2a.b. + \tau_{xy}^2 \sin^2 2\theta$$

$$2) \quad \tau_{x_1 y_1}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \sin^2 2\theta - 2a.b. + \tau_{xy}^2 \cos^2 2\theta$$

$$3) \quad (\sigma_{x_1} - \sigma_{\text{PROM}})^2 + \tau_{x_1 y_1}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \tau_{xy}^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

$$(\sigma_{x_1} - \sigma_{\text{PROM}})^2 + \tau_{x_1 y_1}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$(\sigma_{x_1} - \sigma_{\text{PROM}})^2 + \tau_{x_1 y_1}^2 = R^2$$

CÍRCULO DE MOHR (7.4)

(57)

Representación gráfica de las ecuaciones de transf., es muy útil ya que permite visualizar las relaciones entre los esfuerzos normales y cortantes que actúan sobre varios planos inclinados en un punto de un cuerpo sometido a esfuerzos. Proporciona también medios para calcular esfuerzos principales, esfuerzos cortantes máximos y esfuerzos sobre planos inclinados.

ECUACIONES DE MOHR

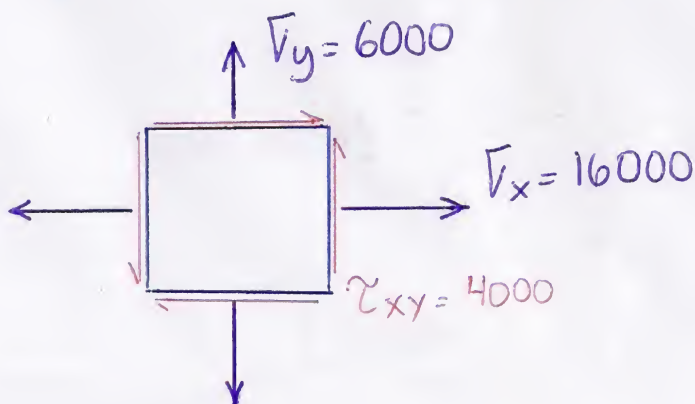
Son las de transformación!

les podemos sumar

$$C = \sigma_{\text{PROM}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}; \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = C \pm R$$

Ej: Trazar el CÍRCULO DE MOHR



1º) Datos para ordenador de la Cora de Referencia

$$X = (16000, 4000)$$

$$Y = (6000, -4000)$$

SIEMPRE DE SIGNOS CAMBIADOS

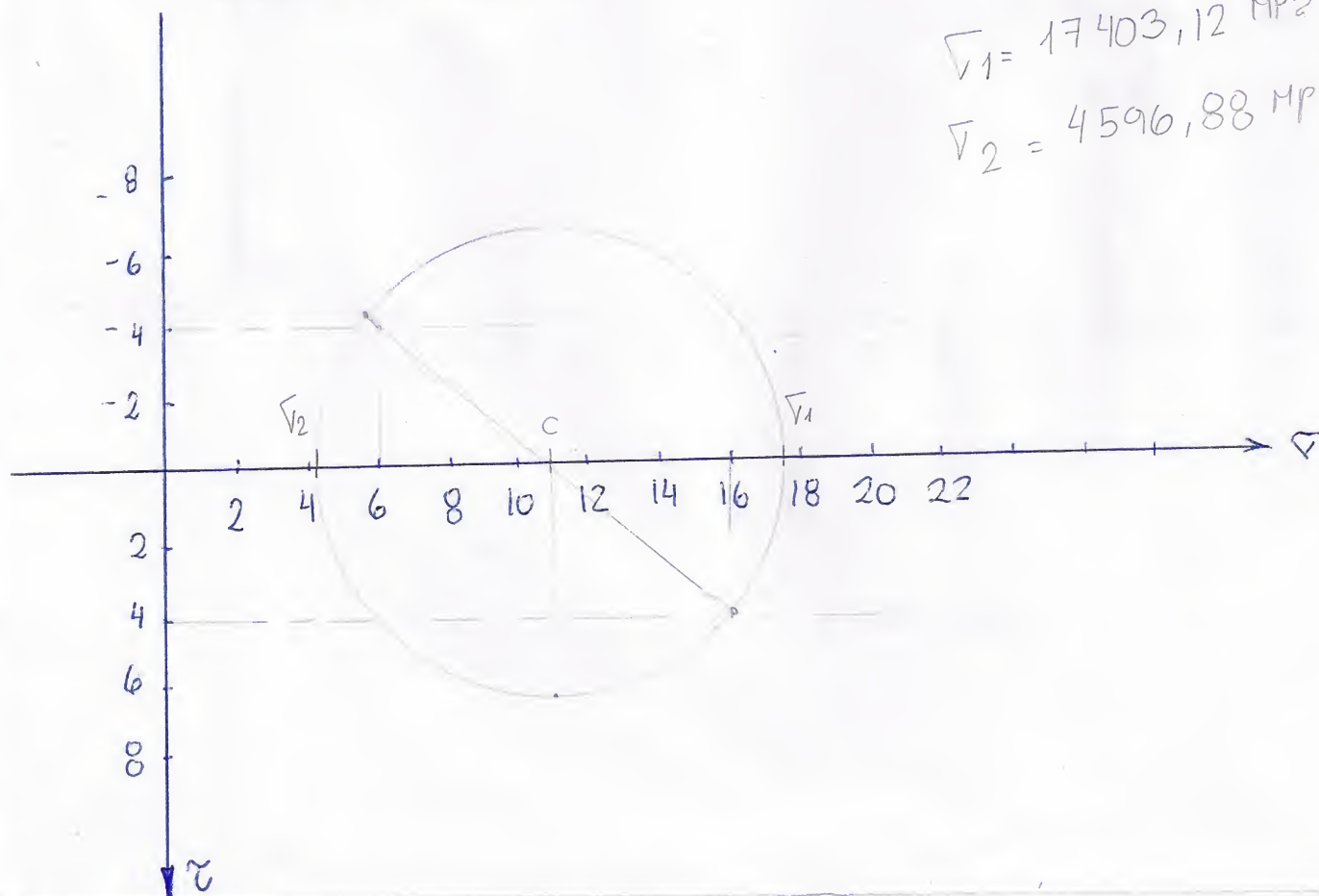
2) CALCULO C y R

$$C = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{6000 + 16000}{2} = 11000$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 6403,12$$

3) TRAZO

CIRCULO DE MOHR DEL ELEMENTO.



$$\sigma_1 = 17403,12 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 4596,88 \text{ MPa}$$

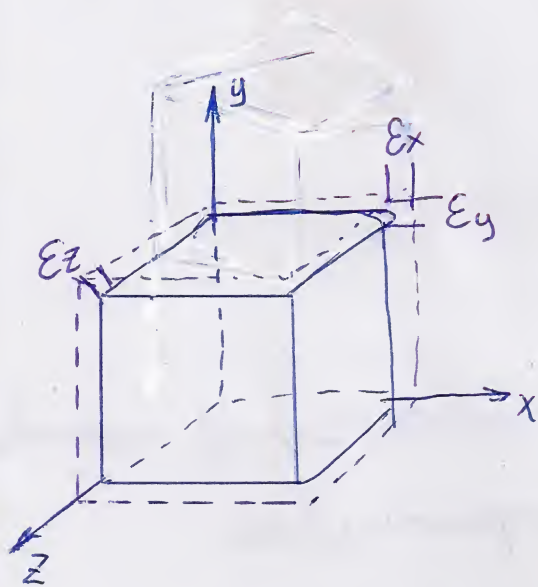
7.5. LEY DE HOOKE PARA ESF. PLANO.

58

El análisis se limitará a materiales que cumplan dos condiciones importantes.

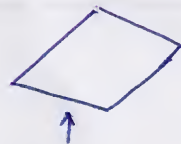
1ª: el material es uniforme en todo el cuerpo y tiene las mismas propiedades en todas las direcciones (MATERIAL HOMOGÉNEO E ISÓTROPO)

2ª: el material sigue la Ley de Hooke, es un material linealmente elástico.



Se consideran def. unitarias normales. ϵ_x, ϵ_y y ϵ_z en esfuerzo plano.

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \epsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \end{cases}$$



τ_{xy} causa una distorsión y la cara z se convierte en un rombo.

• $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$ Deformación por cortantes, es el decremento en el ángulo entre las caras x e y.

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$$

$$\text{el } \boxed{\sigma_z = 0}$$

estas 3 mas las
3 anteriores
se conocen como
Ley de HOOKE para esfuerzo plano

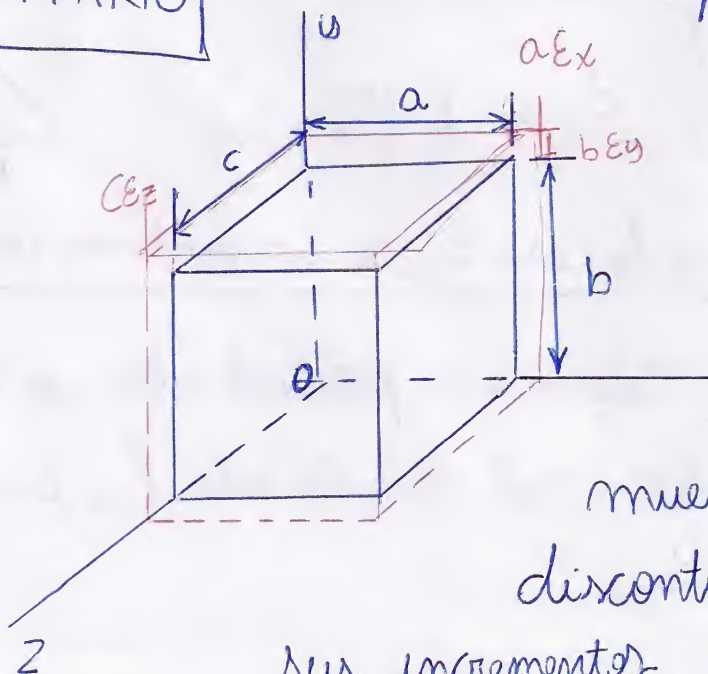
la relación entre ν , G y E .

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$



CAMBIO DE
VOLUMEN
UNITARIO

Se puede det. si se conocen las def. normales
en tres direcciones perpendiculares.



Las deformaciones
 ϵ_x, ϵ_y y ϵ_z producen
Cambios en las dimen
siones que se
muestran en las líneas
discontinuas.

sus incrementos $a \epsilon_x$, $b \epsilon_y$ y $c \epsilon_z$

V_0 es el volumen original del elemento (a)
to.

$$V_0 = a \cdot b \cdot c$$

el volumen final es $V_1 = (a + a \cdot \epsilon_x)(b + b \cdot \epsilon_y)(c + c \cdot \epsilon_z)$

$$= abc (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z)$$

$$V_1 = V_0 (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z)$$

TERMINOS ENTRE PARENTESIS
SON DESPRECIABLES.

$$V_1 = V_0 (1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \quad \leftarrow \text{expresión final}$$

$$\Delta V = V_1 - V_0 = V_0 (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$$

se puede emplear siempre que
las deformaciones sean

pequeñas y permanezcan ctes. en todo su volumen.

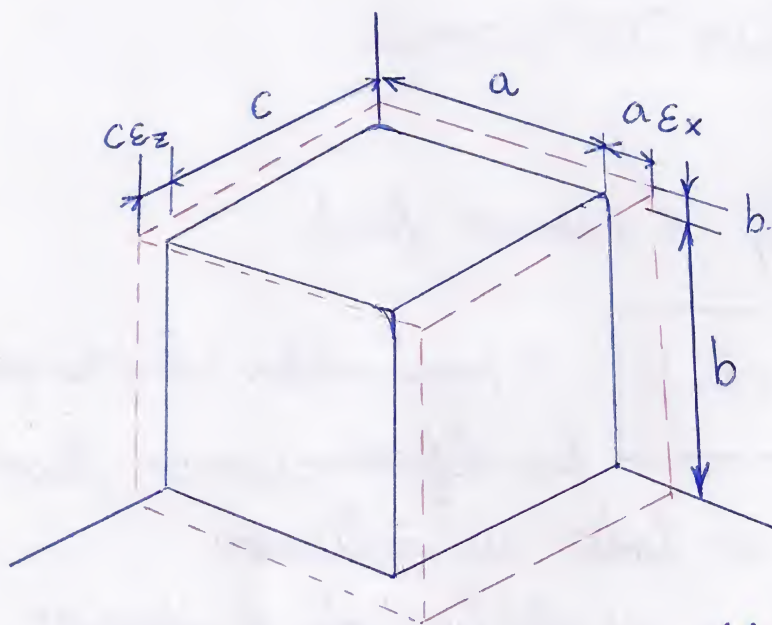
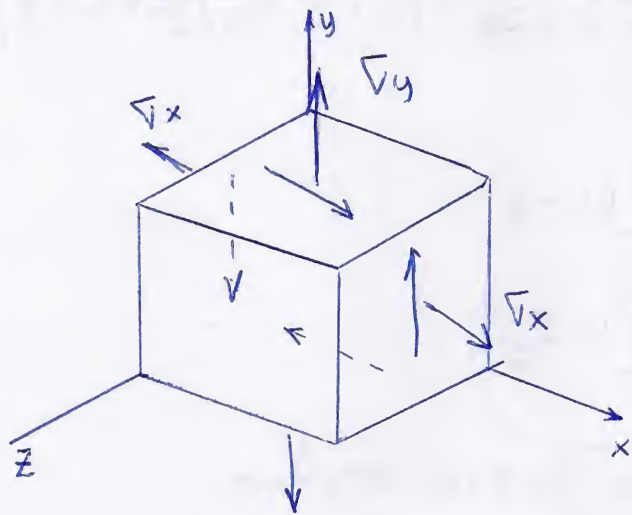
NO es necesario que siga HOOKE, y NO esta limitada a esfuerzo
plomo.

e es el cambio de volumen unitario, se lo conoce tambien
como DILATACIÓN.

$$e = \frac{\Delta V}{V_0} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

DENSIDAD
DE ENERGÍA
DE DEFORMACIÓN
EN ESFUERZO PLANO

U , es la energía de deformación
almacenada en el volumen unitario
de material.



se inicia det. la energía
de deformación asociada
a def. normales.

El trabajo realizado por la
fuerza sobre la cara x es

$$W_x = \frac{1}{2} \underbrace{(\tau_{xy} \cdot b \cdot c)}_F \cdot \underbrace{(a \cdot \epsilon_x)}_d$$

$$W_y = \frac{1}{2} (\tau_{yx} \cdot a \cdot c) (b \cdot \epsilon_y)$$

(análogo para y).

$$\frac{\tau_{xy} \epsilon_x}{2} abc + \frac{\tau_{yx} \epsilon_y}{2} abc$$

Si sumo los dos terminos obtengo la energía almacenada
en el elemento

$$\frac{abc}{2} (\tau_{xy} \epsilon_x + \tau_{yx} \epsilon_y) = W_x + W_y$$

∴ La densidad de energía de deformación debida a los esf normales
y las deformaciones normales es.

↓ PROX.

$$U_1 = \frac{1}{2} (\sigma_x \cdot \epsilon_x + \sigma_y \cdot \epsilon_y)$$

$$\frac{E}{V} =$$

$$L \rightarrow a b c$$

se simplifica

(61)

La densidad de energía asociada a las def por Cortante se evalúa antes

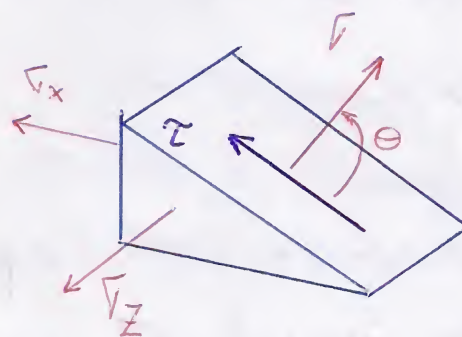
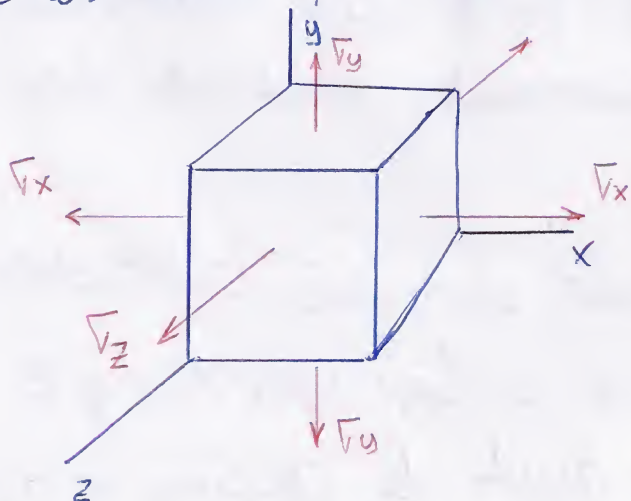
$$U_2 = \frac{\tau_{xy} \cdot \gamma_{xy}}{2}$$

Si se combinan las expresiones, se obtiene la expresión para la DENSIDAD DE ENERGÍA DE DEFORMACIÓN EN ESFUERZO PLANO:

$$U = \frac{1}{2} (\sigma_x \cdot \epsilon_x + \sigma_y \cdot \epsilon_y + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy})$$

ESFUERZO TRIAXIAL 7.6

Un material sometido a esfuerzos normales σ_x, σ_y y σ_z que actúan en tres direcciones mutuamente perpendiculares se dice que se encuentra en un estado de esfuerzo triaxial. NO HAY esfuerzos de corte sobre los caras; σ_x, σ_y y σ_z son principales



los esfuerzos que aparecen en o sobre la cara Cortada son análogos a σ_x y τ_{xy} .

σ y τ se det. a partir de ecuaciones de equilibrio de fuerzas en el plano XY, son independientes de σ_z .

Vale lo visto (CIRCULO MOHR + EQ. DE TRANSF) para det. los σ y τ en esfuerzo triaxial.

ESFUERZO CORTANTE MAXIMO ocurren en planos orientados a 45° con respecto a los planos principales.

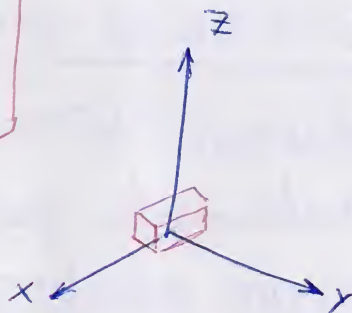
En triaxial los esfuerzos cortantes maximos ocurren sobre elementos orientados a 45° con respecto a los ejes X, Y y Z.

$$(\tau_{\max})_z = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

$$(\tau_{\max})_x = \pm \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}$$

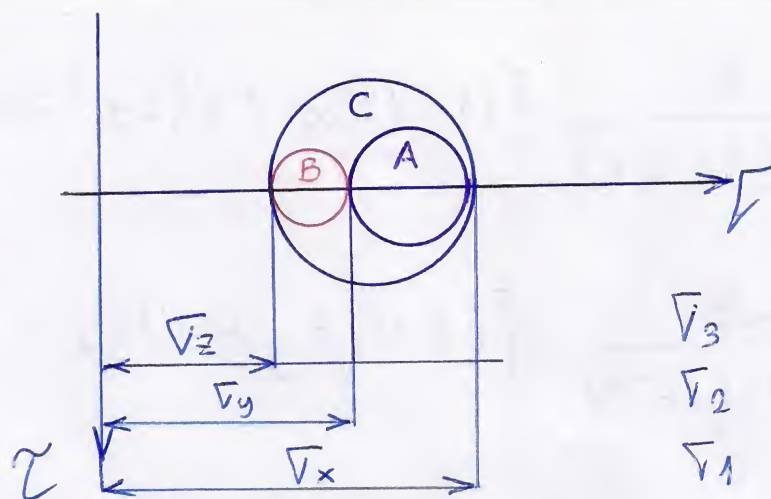
$$(\tau_{\max})_y = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}$$

$$\frac{\text{abs.} - \text{ORD.}}{2}$$



El máximo esfuerzo de Corte es el valor numericamente mayor de los esfuerzos determinados mediante las anteriores ecuaciones.

Los esfuerzos que actúan sobre elementos orientados a varios ángulos con respecto a los ejes X, Y y Z se pueden visualizar con ayuda de CIRCULOS DE MOHR.



Elementos orientados por rotaciones con respecto a Z , corresponde el círculo A. ($\sigma_x > \sigma_y$; tracción).

Se toman de manera similar B y C, para elementos orientados con rotaciones con respecto a X y Y , respectivamente.

$$\tau_{\max} = R_C \text{ (o sea círculo MAYOR)}$$

Los esfuerzos normales que actúan sobre los planos de esfuerzos cortantes máximos tienen magnitudes dadas por las abscisas de los centros de los círculos respectivos.

LEY DE HOOKE PARA ESFUERZO TRIAXIAL

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) \\ \epsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_z + \sigma_x) \\ \epsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{DEFORMACIONES} \\ \text{POR} \\ \text{ESFUERZO TRIAXIAL.} \end{array}$$

$$\bar{\nabla}_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_x + \nu(\epsilon_y + \epsilon_z)]$$

$$\bar{\nabla}_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_y + \nu(\epsilon_z + \epsilon_x)]$$

$$\bar{\nabla}_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_z + \nu(\epsilon_x + \epsilon_y)]$$

Las 6 ecuaciones representan la Ley de Hooke para esfuerzo triaxial.

CAMBIO DE VOLUMEN el cambio de volumen o dilatación para un elemento en esfuerzo triaxial se obtiene de la misma manera que para esfuerzo plano.

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \quad \left(\begin{array}{l} \text{VALIDA para cualquier material} \\ \text{solo que con deformaciones pequeñas} \end{array} \right)$$

$$e = \frac{1-2\nu}{E} (\bar{\nabla}_x + \bar{\nabla}_y + \bar{\nabla}_z)$$

Solo si el material sigue la Ley de HOOKE.

DENSIDAD DE ENERGIA DE DEFORMACIÓN

(68)

Se obtiene de la misma manera que para esfuerzos planos. Cuando τ_x y τ_y actúan solos, la densidad de en. por def.:

$$U = \frac{1}{2} (\tau_x \epsilon_x + \tau_y \epsilon_y)$$

en esfuerzo triaxial, se somete a τ_x, τ_y y τ_z la expresión queda de la siguiente forma.

$$U = \frac{1}{2} (\tau_x \epsilon_x + \tau_y \epsilon_y + \tau_z \epsilon_z)$$

7.3 ESFUERZOS PRINCIPALES Y ESFUERZOS CORTANTES MAX

Los esfuerzos normales τ_{x_1} y los cortantes $\tau_{x_1 y_1}$ varían continuamente conforme giran los ejes de acuerdo con el ángulo θ .

Los esfuerzos normales y cortantes alcanzan los máximos o mínimos en intervalos de 90° , y suelen ser útiles para las cuestiones de diseño.

ESFUERZOS PRINCIPALES Los esfuerzos normales máximos y mínimos se llaman esfuerzos principales y los encontramos derivando respecto a θ e igualando a 0 la eq. de transformación.

$$\frac{d\tau_{x_1}}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{2\tau_x - \tau_y}{2} \cdot (-\sin 2\theta_p) + 2\tau_{xy} \cdot \cos 2\theta_p = 0$$

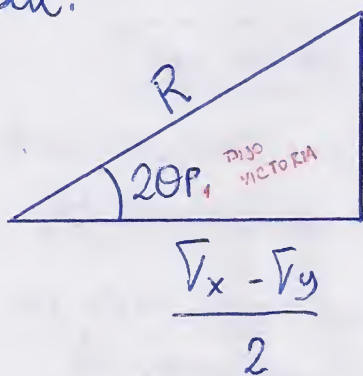
$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

De aquí salen los valores de $2\theta_p$ en el intervalo de 0° a 360°

Los valores difieren en 180° el uno del otro, con un valor entre 0 y 180° y otro entre 180° y 360° ; por lo tanto, el ángulo θ_p tiene dos valores que difieren en 90° , uno entre 0 y 90° , y otro entre 90° y 180° . Se conocen como Ángulos principales.

Para uno de ellos, σ_x , es un esfuerzo máximo, para el otro es mínimo. (los ángulos dif. en 90°), los esfuerzos principales ocurren sobre planos mutuamente perpendiculares.

Reemplazando θ_{p1} y θ_{p2} en la ec. de transformación de esfuerzos normal, vemos que el esfuerzo se vincula con un ángulo principal.



• Para los esfuerzos principales también podemos encontrar fórmulas generales a partir de la ecuación de la tangente. podemos construir un triángulo rectángulo.

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \text{y} \quad \cos 2\theta_p = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}$$

$$\sin 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{R}$$

Podemos sustituir las expresiones de $\cos 2\theta_p$ y $\sin 2\theta_p$ en las ecuaciones de transformación y así encontrar ecuaciones generales para estados principales.

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- Si igualamos a 0 el esfuerzo cortante $\tau_{x_1 y_1}$, obtenemos la misma ecuación del ángulo θ_p , los ángulos sobre planos cortantes cero son los mismos que para planos principales. \rightarrow Los esfuerzos cortantes son cero sobre los planos principales.
- Para esfuerzos uniaxial y biaxial los planos x e y ya son planos principales. $\tau_{xy}(2\theta_p) = 0$. y los valores principales σ_p son 0° y 90° . Los cortantes son cero en esos planos.
- Para un elemento en cortante puro los planos principales están a 45° . los θ_p son 45° y 135° . τ_{xy} es \oplus ; $\sigma_1 = \tau_{xy}$
 $\sigma_2 = -\tau_{xy}$
- Nos debemos aclarar que el elemento de esfuerzo es tridimensional y que tiene tres esfuerzos principales en acción sobre tres planos mutuamente perpendiculares. $\sigma_1 > \sigma_2$ (def). y σ_3 puede ser menor o mayor, en esfuerzo plano $\sigma_3 = 0$.

ESFUERZOS CORTANTES MAXIMOS

Se deriva con respecto a θ la ecuación de $\tau_{x_1 y_1}$, llamaremos θ_s al ángulo.

$$\frac{d\tau_{x_1 y_1}}{d\theta} = 0 \Rightarrow \tau_{xy} \tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

un valor entre 0 y 90
y otro entre 90 y 180

Los esf. cortantes máximos ocurren sobre planos perpendiculares, difieren solo en el signo, ambos en módulo valen igual.

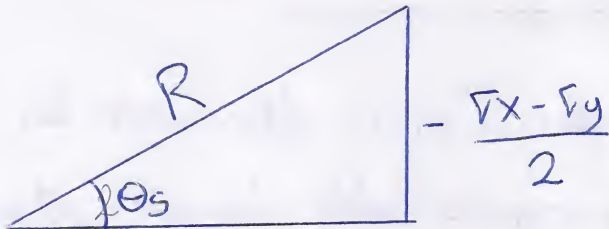
Comparamos θ_s y θ_p (sus eq).

$$\tan 2\theta_s = - \frac{1}{\tan 2\theta_p}$$

Los ef. cortantes maximos ocurren a 45° respecto a los planos principales

$$\frac{\tan 2\theta_s}{\cos 2\theta_s} + \frac{\cos 2\theta_p}{\tan 2\theta_p} = 0 \Rightarrow \boxed{\theta_s = \theta_p \pm 45^\circ}$$

$$\theta_{s1} = \theta_{p1} - 45^\circ$$



$$\cos 2\theta_{s1} = \frac{\tau_{xy}}{R}$$

$$\sin 2\theta_{s1} = \frac{-\sigma_x - \sigma_y}{2R}$$

$$\boxed{\tau_{MAX} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

substituyo en la segunda ecuación de transform.

otra forma de encontrar τ_{MAX} es

$$\boxed{\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \tau_{MAX}}$$

Cuando existen esfuerzos cortantes maximos tambien existen normales

$$\boxed{\sigma_{x1} = \sigma_{y1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \sigma_{PROM}}$$

- Para esfuerzos UNIAXIAL Y BIAXIAL, los planos de esfuerzo cortante ocurren a 45° de los ejes "x" e "y" (PLANOS PRINCIPALES)
- Para el caso de esfuerzo cortante puro, los esfuerzos maximos ocurren en el plano "X" y en el plano "Y".

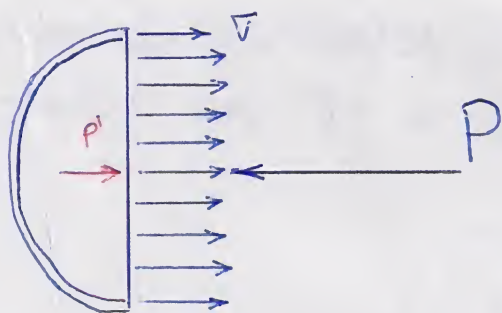
RECIPIENTES ESFERICOS A PRESIÓN

Los recipientes a presión son estructuras cerradas que contienen líquidos o gases a presión.

Se considera que poseen pared delgada cuando la razón entre su radio r y espesor t es mayor que 10. ($\frac{r}{t} \geq 10$)

Se supone que la presión " p " interna es superior que la exterior, de lo contrario se colapsaría hacia adentro. (Evitar el pandeo hacia adentro).

ESFERA \rightarrow FORMA IDEAL, PARA RESISTIR PRESIONES



$$P = p \cdot (\pi \cdot r^2)$$

" P " es la presión MANOMÉTRICA y es siempre mayor a la externa

$$P' = V \cdot (2\pi \cdot r_m \cdot t)$$

V es uniforme por la simetría de la figura, el esfuerzo está distribuido uniformemente a través del espesor t . (POR PARED DELGADA)

La resultante es $V(2\pi \cdot r_m \cdot t)$

$$\Sigma F_h: V(2\pi \cdot r_m \cdot t) - P(\pi \cdot r^2) = 0$$

$$V = \frac{P \cdot r^2}{2 \cdot r_m \cdot t}$$

$r_m = r + \frac{t}{2}$ y r poseen poca diferencia (DESPRECIABLE)
 $r = r_m$

$$V = \frac{P \cdot r^2}{2 \cdot r \cdot t} = \frac{P \cdot r}{2t}$$

$$V = \frac{P \cdot r^2}{2 \cdot r_m \cdot t}$$

ó

$$V = \frac{P \cdot r}{2t}$$

La pared de un recipiente esférico presurizado está sometida a fuerzas de tracción en todas las direcciones.

ESFUERZOS
SUPERFICIE
EXTERIOR

por lo general esta libre de acción de cargas

SIEMPRE SON
PRINCIPALES

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{P \cdot r}{2t}$$

PLANO XY

$$\sigma_3 = 0$$

↓
EN Z

$\tau_{MAX} \rightarrow$ ROTACIONES FUERA DEL PLANO, rotaciones con respecto a X y a Y. al orientarse 45° con respecto a "X" y "Y"

$$\tau_{MAX} = \frac{\tau}{2} = \frac{P \cdot r}{4t}$$

ESFUERZOS
SUP. INTERIOR

un elemento posee los mismos σ_x y σ_y que un elemento del exterior. Además

un esfuerzo de compresión σ_z igual a $-P$ que actúa en Z.

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{P \cdot r}{2t}$$

$$\sigma_3 = -P$$

En el plano $\tau=0$ pero el esfuerzo cortante máximo fuera del plano (a 45° con respecto a X o Y) es

$$\tau_{MAX} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\frac{P \cdot r}{2t} - (-P)}{2} = \frac{P}{2} \left(\frac{r}{2t} + 1 \right)$$

por ser de pared delgada $\frac{r}{2t} \gg 1$

Queda como

$$\tau_{MAX} = \frac{P \cdot r}{2 \cdot 2t} =$$

$$\tau_{MAX} = \frac{P \cdot r}{4t}$$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$\frac{\sigma_1 - (-P)}{2}$$

$$\frac{\sigma_1 + P}{2}$$

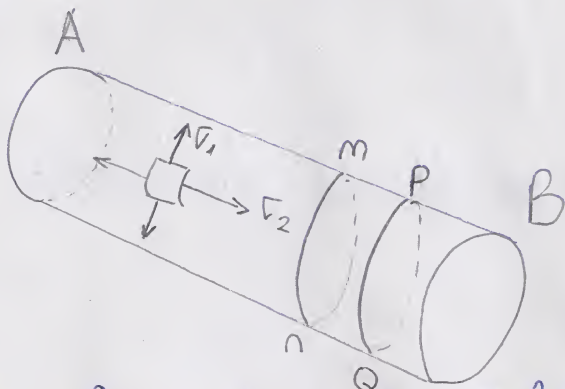
Limitaciones

(66)

- El espesor debe ser pequeño (Pared delgada).
- "P" interna mayor que externa. (evitar PANDEO)
- Análisis basado en presión interna, no se consideran efectos de cargas externas, reacciones, peso del contenido y el propio peso de la estructura.
- Formulas validas en toda la pared excepto en sitios de concentración de tensiones. (esfuerzos).

RECIPIENTE CILINDRICO A PRESIÓN

Se realiza el analisis tomando una porción del recipiente con pared delgada.



Se encuentra sometido a una presión interna.

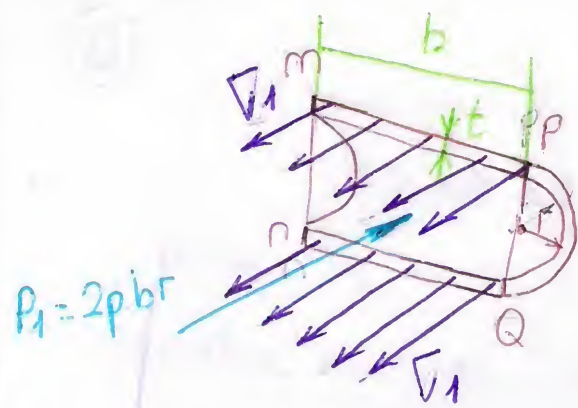
Los esfuerzos σ_1 y σ_2 son esfuerzos de membrana en la pared

NO HAY esfuerzo de corte sobre estas caras, por la simetría y carga.

• σ_1 y σ_2 SON PRINCIPALES

$\sigma_1 \rightarrow$ esfuerzo CIRCUNFERENCIAL

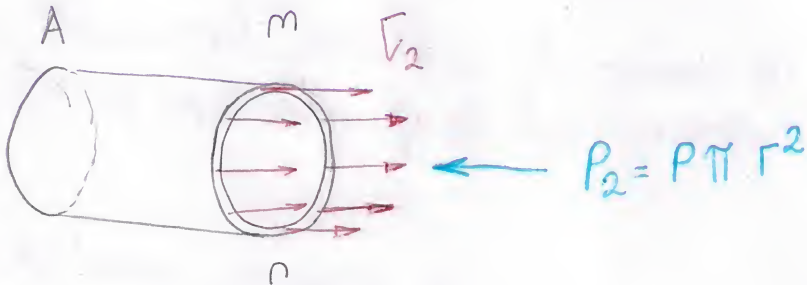
$\sigma_2 \rightarrow$ esfuerzo longitudinal



El esfuerzo circ. σ_1 se determina planteando

$$\sigma_1 (2b \cdot t) - 2P \cdot b \cdot \gamma = 0$$

$$\sigma_1 = \frac{P \cdot \gamma}{t}$$



El esfuerzo longitudinal o σ_2 se obtiene planteando

$$\sigma_2 (2\pi \cdot \gamma \cdot t) - P \cdot \pi \cdot \gamma^2 = 0$$

$$\sigma_2 \cdot 2\pi \gamma t = P \pi \gamma^2$$

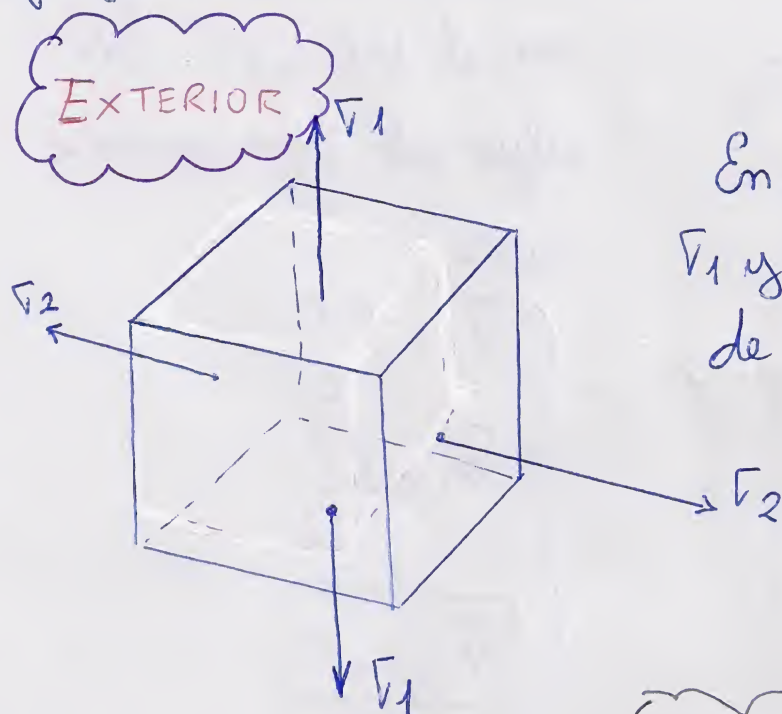
$$\sigma_2 = \frac{P \cdot \gamma}{2t}$$

de las dos expresiones obtengo que

$$2\sigma_2 = \sigma_1$$

Esfuerzos sob el exterior y el interior.

(67)



En el exterior, estan actuando σ_1 y σ_2 sob el elemento de la pared. (elemento de esfuerzo).

el tercer esfuerzo principal (σ_3 es 0!

"NO HAY P." fuera. (desprecie fl.)

El τ_{MAX_Z} ocurre cuando roto a 45° el elemento siendo el eje al cual roto Z !

$$(\tau_{MAX})_Z = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_1}{4} = \frac{P \cdot \Gamma}{4t} \quad (\text{esf en el PLANO})$$

fuera del plano, el esfuerzo de corte maximo se obtiene rotando el elemento a 45° con respecto a X e Y .

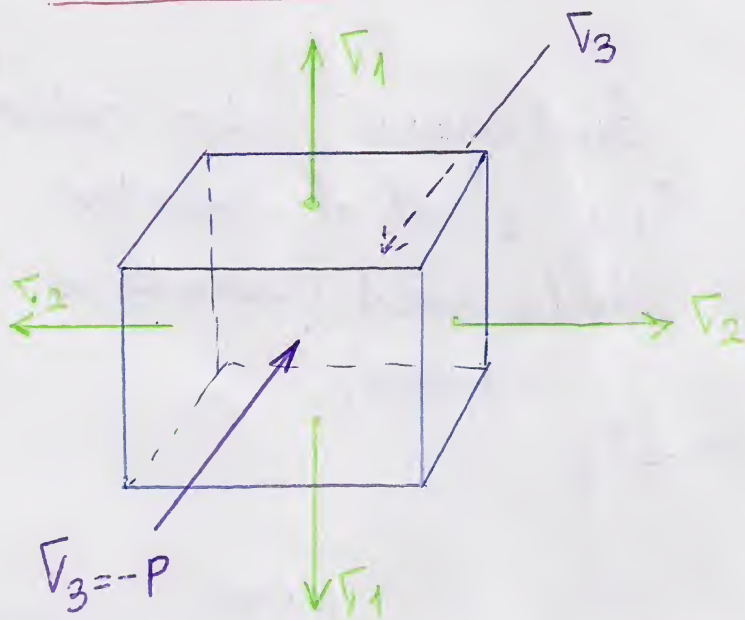
$$(\tau_{MAX})_X = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{P \cdot \Gamma}{2t}$$

$$(\tau_{MAX})_Y = \frac{\sigma_2}{2} = \frac{P \cdot \Gamma}{4t}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{P \cdot \Gamma}{2t}$$

↓
ESFUERZO CORTANTE
MAX. ABSOLUTO.

INTERIOR



en el interior los esfuerzos principales son

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{P \cdot r}{t} \\ \sigma_2 = \frac{P \cdot r}{2t} \\ \sigma_3 = -P \end{cases}$$

los tres esfuerzos cortantes máximos, que se obtienen mediante rotaciones a 45° con respecto a x, y, z son

$$(\tau_{\max})_x = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{P \cdot r}{2t} + \frac{P}{2}$$

$$(\tau_{\max})_y = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \frac{P \cdot r}{4t} + \frac{P}{2}$$

$$(\tau_{\max})_z = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{P \cdot r}{4t}$$

el término $\frac{P}{2}$ se puede quitar si es un cascarón de pared delgada (iguales a las expresiones del exterior).

No se considera la presencia del esfuerzo de Compresión en la dirección z . (iguales interior y exterior), es viable si se consideran los otros numerosos aproximaciones en esta teoría.

• Estas expresiones son válidas en partes del cilindro donde no haya discontinuidades o concentraciones de esfuerzos (en los extremos por ejemplo).

ESFUERZOS MAXIMOS EN VIGAS 8.4

68

Es usual que se comience determinando los esfuerzos normal y cortante que actuan sobel secciones transversales.

$$\sigma = - \frac{M \cdot y}{I}$$

$$\tau = \frac{V \cdot Q}{I \cdot b}$$

↳ esfuerzo de corte, valores max. en el eje neutro.
↳ esfuerzos normales; valores máximos a la fibra mas alejada del eje neutro

Los esfuerzos normales se calculan en la sección transversal de momento flectante máximo y los esfuerzos cortantes se calculan en la sección transversal de fuerza cortante máxima.

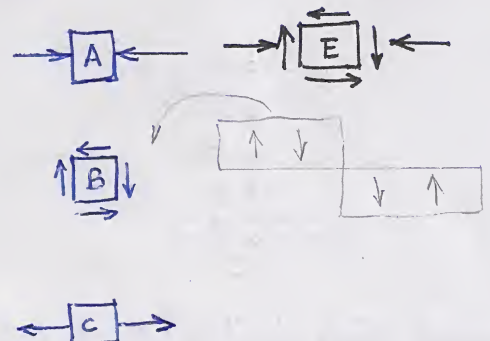
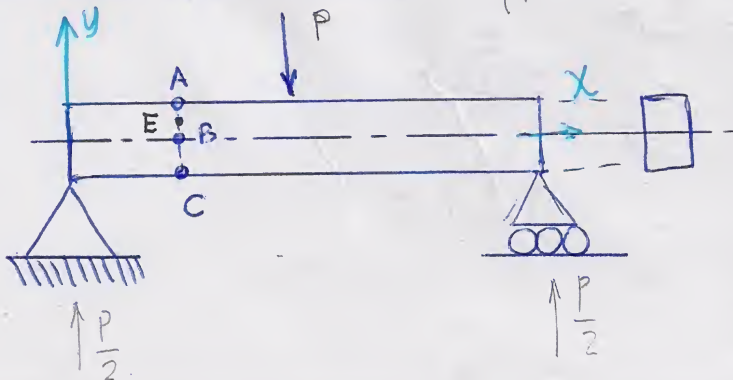
Es necesario que se determinen en varios puntos de la misma.

VIGAS CON SECCION TRANSVERSAL RECTANGULAR

Se analiza el comportamiento en elementos sobel una misma sección

Como son sus esfuerzos NORMALES y de CORTE.

Para encontrar los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes maximos en cada punto, se pueden emplear ecuaciones de transformación de esfuerzos plano o bien el Circulo de MOHR. (Pa la mitad)

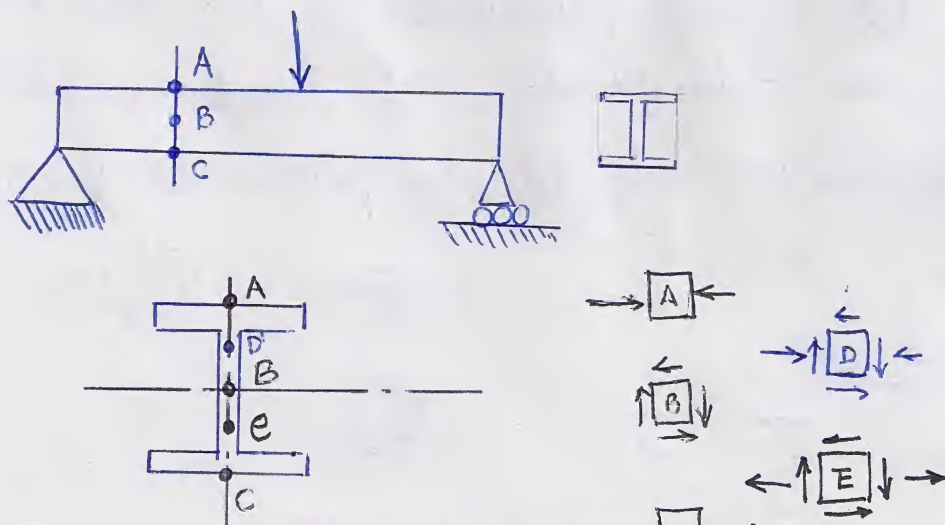


Los máximos esfuerzos normales los obtengo en las fibras superior e inferior. El máximo esfuerzo de corte lo obtengo en la fibra media. En puntos intermedios habrá combinaciones de esfuerzos.

El esfuerzo de corte máximo en las partes superior e inferior de la VIGA ocurre en planos a 45° . En el eje neutro el esfuerzo cortante máximo ocurre en planos verticales y horizontales, en los demás puntos siempre se obtendrán los máximos a planos a 45° .

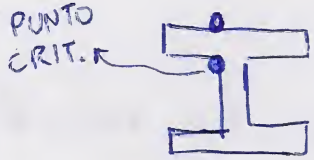
En regiones de momento flectante grande, los esfuerzos cortantes máximos se tienen en la parte superior e inferior de la viga; en regiones con momento flectante bajo y fuerza cortante elevada, los esfuerzos cortantes máximos se tienen en el eje neutro.

VIGAS DE PATIN ANCHO se analizan de forma similar a lo visto en vigas de sección rectangular



pueden estar dentro en la pared ext.
da igual.

Los esfuerzos principales máximos ocurren en la parte superior e inferior de la VIGA. donde los esfuerzos obtenidos con la fórmula de la flexión tienen sus valores máximos. Dep. del momento flexionante ya que algunas veces los valores máximos ocurren en la unión del alma con el patín. En el corte se ven valores significativos, los normales son ligeramente menores.



FUNDAMENTAL
ANALIZAR
SOBRE LOS
PUNTOS
CRÍTICOS

UNION DE EL
PATÍN Y
EL ALMA

Esfuerzo cortante máximo. Siempre ocurre sobre el eje neutro.

Sin embargo, los esfuerzos cortantes máximos que actúan sobre planos inclinados por lo general ocurren en la parte superior o inferior de la viga o donde el alma se une al patín debido a la presencia de esfuerzos normales.

Es necesario el análisis en puntos de concentración de esfuerzos, cerca de los apoyos, puntos de carga, filetes y orificios.

CARGAS COMBINADAS 8.5 en muchas ^{ocasiones} se requiere que los elementos resistan más de un tipo de carga. Cuando existe más de un tipo de carga, se dice que el elemento está sujeto a cargas combinadas.

Se utilizan métodos de superposición para el análisis, sin embargo es necesario que siga la ley de HOOKE el material. (esfuerzos y deformaciones sean funciones lineales). y que los desplazamientos sean pequeños.

METODO DE ANÁLISIS

- 1) selección de puntos de la estructura para determinar esf. y def. (donde sean grandes).
- 2) determinar los resultantes de esfuerzos en la sección que contiene al punto.
- 3) Calcular los esf. normal y cortante en el punto, si es un recipiente a presión también los esfuerzos debidos a presión interna.

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$\tau = \frac{T \cdot r}{I_p}$$

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I}$$

$$\tau = \frac{V \cdot Q}{I \cdot b}$$

$$\sigma = \frac{P \cdot r}{t}$$

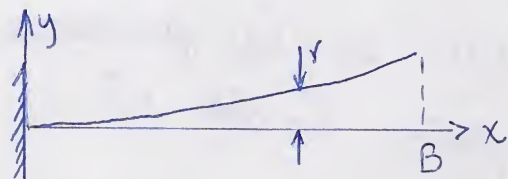
- 4) Combine los esfuerzos. (obtener σ_x , σ_y y τ_{xy})
- 5) Det. esfuerzos principales. (MOHR o EC.)
- 6) Det. las def. en un punto, con la ley de HOOKE.
- 7) Seleccionar puntos adicionales y repetir el proceso, - hasta tener suf. información!

DE FLEXIONES EN VIGAS UNIDAD VIII

70

EC. DIF. DE LA CURVA DE DEFLEXIÓN 9.2

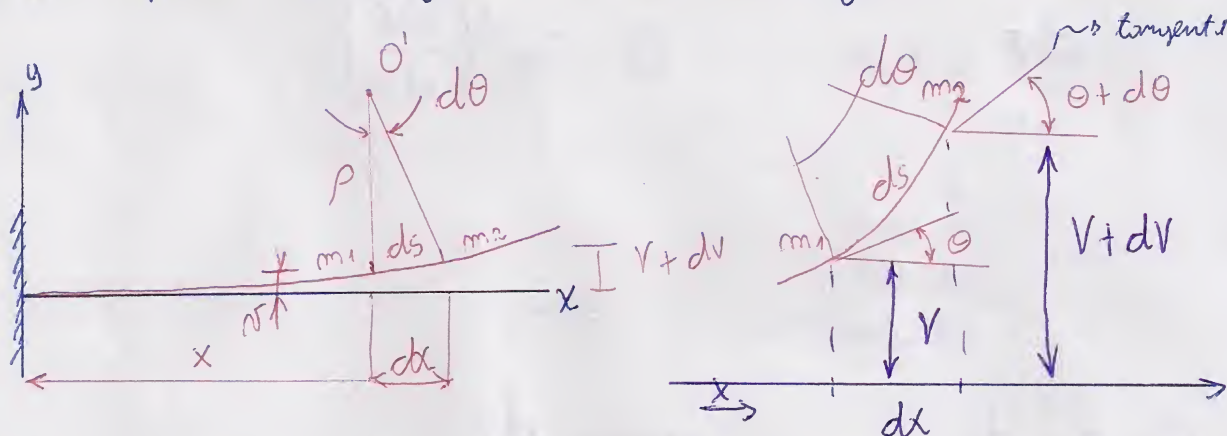
Determinar deflexiones se basan en ecuaciones diferenciales de la curva de deflexión y sus relaciones asociados.



La deflexión V es el desplazamiento en la dirección y de cualquier punto sobre la viga. El eje y es positivo hacia arriba, las deflexiones son positivas (+) y negativas (-) hacia abajo.

hacia arriba.

debemos expresar la deflexión V como una función de la coordenada " x ".



m_1 ubicado a una distancia x desde el origen, también se muestra el segundo punto m_2 a $x + dx$, en ese punto la def. es $V + dV$

↳ INCREMENTO

Cuando la viga se flexiona, no solo hay una deflexión en cada punto a lo largo del eje, también hay una rotación.

θ es el ángulo de rotación. (entre el eje x y tangente a la viga). Ángulo positivo cuando es contrario a los movimientos del reloj.

en m_2 $\theta + d\theta$ (ang. rot.).

$$P \cdot d\theta = ds$$

L , dist. a lo largo de la curva de def.
entre m_1 y m_2 .

$$k = \frac{1}{P} = \frac{d\theta}{ds} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} \oplus \\ \ominus \end{matrix}$$

La pendiente de la curva de deflexión es la primera derivada dv/dx de la expresión para la def. v .

Pendiente es el incremento dv de la deflexión dividido entre el incremento de dx a lo largo de x .

$$\frac{dv}{dx} = \tan \theta \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{dv}{dx} \right)$$

↓
POR QUE
SON INF.
PEQUEÑOS

$$\cos \theta = \frac{dx}{ds}$$

$$\sin \theta = \frac{dv}{ds}$$

VIGAS CON ROTACIONES PEQUEÑAS.

Las curvas de deflexión de la mayor parte de las vigas y columnas tienen ángulos de rotación, deflexiones y curvaturas muy pequeñas. SIMPLIFICACIONES MATEMÁTICAS para resolverlo.

$$ds \approx dx \quad (\text{PRIMERA})$$

$$k = \frac{1}{P} = \frac{d\theta}{dx}$$

(SEGUNDA)

71

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2}$$

Si combinamos con la $K_c = \frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dx^2}$

VALIDA PARA
CUALQ. MATERIAL
SIEMPRE QUE LAS
ROTACIONES SEAN PEQ.

M es L.E y sigue HOOKE.

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{M \rightarrow M_F}{\underbrace{E \cdot I}_{\text{RIGIDEZ}}}$$

Euler
BERNOULLI

Si combinamos las dos anteriores obtenemos la ecuación diferencial básica de la curva de deflexión,

Bernoulli

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot I}$$

Se podrá integrar siempre que M, E e I sean func de X.

ecuaciones adicionales : $Q = V$ (CORTE).

$$\frac{dQ}{dx} = -q$$

$$\frac{dM}{dx} = Q$$

$$v'' = \frac{M}{E \cdot I} \Rightarrow$$

$$M = E \cdot I \cdot v''$$

$$Q = \frac{dM}{dx} = \frac{d(E.I. V'')}{dx} = \boxed{E.I. V''' = Q}$$

$$-q = \frac{dQ}{dx} = \frac{d(E.I. V''')}{dx} = \boxed{E.I. V^{(4)} = -q}$$

Solo para el caso de VIGAS PRISMATICAS, donde $E.I$ es Constante.

Las ec. Dif. encontradas se llaman, ecuación del momento flexionante, ecuación de la fuerza cortante y ecuación de la Carga.

- EL MAT. SIGUE HOOKE Y LAS PEND. DE LA CURVA DE DEFLEXIÓN SON MUY PEQUEÑAS.

- Se Consideran que las defor son debidas a flexión PURA!

EXPRESION EXACTA

Con pendientes grandes, no se pueden usar las aprox anteriores. Se deben recurrir a expresiones exactas.

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d(\arctan V')}{dx} \frac{dx}{ds}$$

se observa de la figura anterior $ds^2 = dx^2 + dv^2$ ó
 $ds = [dx^2 + dv^2]^{\frac{1}{2}}$

al dividir ambos lados por dx

72

$$\frac{ds}{dx} = \left[1 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[1 + v'^2 \right]^{1/2}$$

$$\text{or } \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\left[1 + v'^2 \right]^{1/2}}$$

$$\frac{d}{dx} (\arctg v') = \frac{v''}{1 + (v')^2}$$

substituye y obtienes

$$K_c = \frac{1}{\rho} = \frac{v''}{\left[1 + (v')^2 \right]^{3/2}}$$

9.3 DEFLEXIONES POR INTEGRACIÓN DE LA ECUACIÓN DEL MOMENTO FLEXIONANTE.

Se trabaja con la ecuación del momento flexionante, como es de segundo orden son necesarias dos integraciones.

la primera produce la pendiente $V' = \frac{dv}{dx}$ y la segunda produce la deflexión v .

Determinar la expresión del momento flector M , sustituimos la expresión para M en la ecuación diferencial e integramos (v' sale). Produce cte. 1. de integración. Se integra nuevamente y sale (v) y cte 2. de integración.

Las ctes. se pueden encontrar mediante condiciones son de tres tipos.

1) Condiciones de frontera; relación con las deflexiones y pend. en los apoyos de la viga.

2) Cond. de Continuidad; puntos donde confluyen las regiones de integración.

3) Condiciones de simetría; pueden estar presentes, si soporta una carga uniforme en toda su longitud, sabemos de antemano que la pendiente de la curva de deflexión en el punto medio debe ser cero.

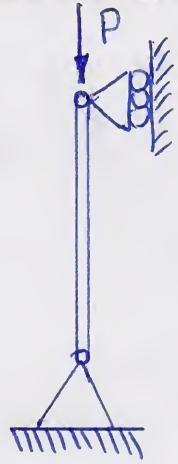
NUMERO CONDICIONES IDTES = NUMERO DE CTES (INCOGNITAS)

9.4 DEFLEXIONES POR INTEGRACIÓN DE LAS ECUACIONES DE LA FUERZA CORTANTE Y DE LA CARGA.

Similar a lo anterior, se requieren mas integraciones.

PANDEO Y ESTABILIDAD. (11.2)

73



CARGA CRÍTICA: es la transición de estable a inestable. (P_{cr}).
 CARGA DE TRANSICIÓN

$$P_{cr} = \frac{4\beta_R}{L}$$

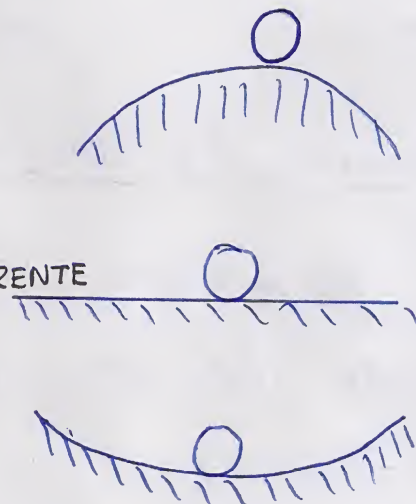
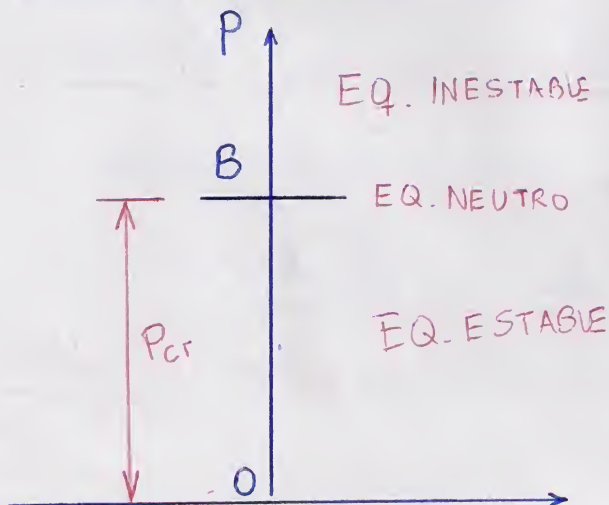
DEF: el pandeo es la principal causa de falla. Puede por ejemplo en columnas esbeltas sometidas a compresión!

la carga crítica es la única para la cual la estructura se encontrará en equilibrio en la posición perturbada.

P_{cr} es frontera entre inestable y estable.

Si $P < P_{cr}$ es estable
 $P > P_{cr}$ " inestable.

DIAGRAMA DE BIFURCACIÓN

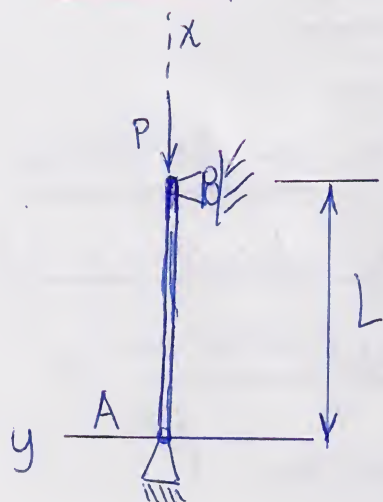


S
 \hookrightarrow DESP. LATERAL

11.3. COLUMNAS CON EXTREMOS ARTICULADOS,

SIN IMPERFECCIONES

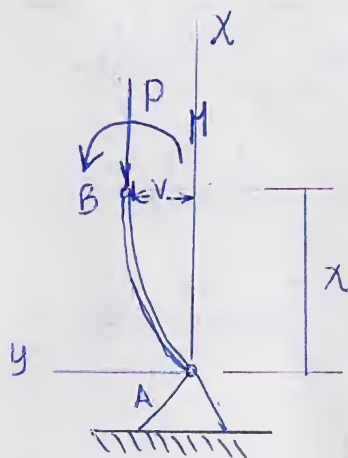
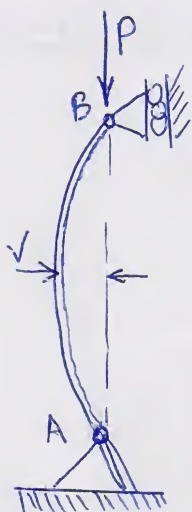
Se toma una columna perfectamente recta y hecha de material linealmente elástico que sigue la ley de HOOKE, se la llama COLUMNA IDEAL.



Si $P < P_{CR}$ eq. estable

$P = P_{CR}$ eq. neutro en posición
recta o ligeramente flexionado

$P > P_{CR}$ eq. inestable.



$$M = -P \cdot v$$

Para determinar los valores críticos y las formas
flexionadas para una columna ideal articulada.

Utilizaremos las ecuaciones de la elástica.

$$M = -P \cdot v$$

En flexión $K = \frac{d^2 v}{dx^2}$

$$v'' = \frac{M}{E \cdot I} = - \frac{P \cdot v}{E \cdot I}$$

↳ lo de Bernoulli.

TEORÍA DE
EULER
BERNOULLI

$$V'' + \frac{P}{E \cdot I} \cdot V = 0$$

74

$\underbrace{\hspace{1cm}}$

K^2

\hookrightarrow Constante positiva

La solución general es $V = C_1 \cdot \sin K \cdot x + C_2 \cdot \cos K \cdot x$

donde C_1 y C_2 Ctes de integración (a evaluar)

Usando cond de frontera.

$$V(0) = 0 \quad \text{y} \quad V(L) = 0$$

$$V(0) = \underbrace{C_1 \cdot \sin(0)}_{=0} + \underbrace{C_2 \cdot \cos(0)}_{C_2=0}$$

$$C_2 = 0 \quad \therefore \quad \boxed{V = C_1 \cdot \sin Kx}$$

$$V(L) = C_1 \cdot \sin(K \cdot L) = 0$$

La ecuación queda $C_1 \cdot \sin K \cdot L = 0$

\swarrow Si $C_1 = 0 \rightarrow V = 0$ (Columna recta)

$$\searrow \sin K \cdot L = 0 \rightarrow K \cdot L = 0, \pi, 2\pi$$

$$K \cdot L = n \cdot \pi \quad n = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$P = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

$$V = C_1 \cdot \sin \frac{n\pi x}{L}$$

CARGA CRITICA

$$P_{CR} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

Con $n=1$

La Carga critica menor para una columna. Con extremos articulados.

Con $m=1$ se denomina carga fundamental de pandeo de columna.

El pandeo descrito aqui se llama pandeo de Euler, y P_{CE} se denomina Carga de Euler.

$m=1$ en la practica

$m=1$

$m=2$

m es el numero de semiondas

ESFUERZO CRITICO

de la seccion transversal.

$$\sigma_{CR} = \frac{P_{CR}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{A \cdot L^2}$$

Siendo $\Gamma_G = \sqrt{\frac{I}{A}}$ (radio de giro)

dividiendo la $Carga_{CR}$ entre el area

$$\sigma_{CR} < \sigma_{D2}$$

FALLA POR PANDEO

$$\sigma_{D2} < \sigma_{CR}$$

FALLA EL MATERIAL

Combinando la expresion de radio de giro

75

$$\nabla_{CR} = \frac{\pi^2 \cdot E}{(L/r_g)^2}$$

$$\lambda = \frac{L}{r_g}$$

donde $\frac{L}{r_g}$ se denomina esbeltez.

Una Columna que es larga y esbelta tendra una relacion de esbeltez alta y por lo tanto un eff. Critico bajo. (MENOS CARGA PARA SER PUESTA EN ESTADO DE PANDEO).

Una Columna que es corta y robusta tendra una relacion de esbeltez baja y se pondra con esfuerzo alto (valores comunes, entre 30 y 150).

$$\frac{L}{r_g} = \lambda$$

DIAGRAMA DE BIFURCACION VERDADERO

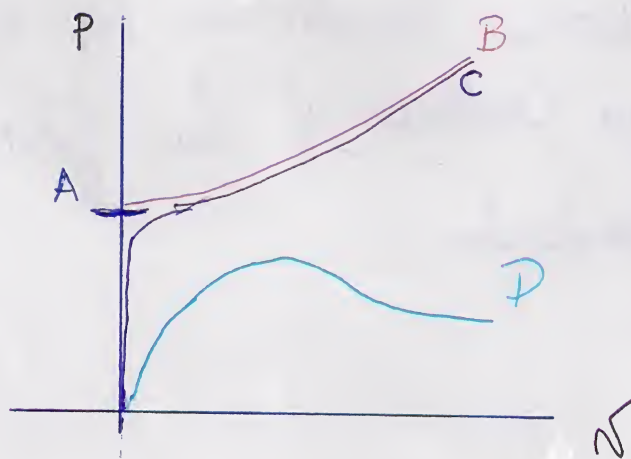


DIAGRAMA DE CARGA DEFLEXIÓN

A: Euler (VIGA IDEAL)

B: VIGA IDEAL COMPUESTA

C: VIGA REAL, χ_{comp}

D: $\nabla_{CR} > \nabla_{012}$

COLUMNAS CON
OTRAS COND.
DE SOPORTE

Se realiza de la misma

forma o mas bien similar.

Se supone a la columna en estado pandeado y se obtiene una exp. para el momento flector en la columna. Segundo, establecemos la ec. diferencial de la curva de deflexión ($E \cdot I \cdot V'' = M$).

Tercero, resolvemos la ecuación y obtenemos su solución general, que contiene dos Ctes de Integración.

Cuarto, Aplicamos condiciones frontera relativas a la deflexión V y la pendiente V' y obtenemos un conjunto de ecuaciones simultáneas.

Por ultimo resolvemos las ecuaciones para obtener Carga Critica y la forma flexionada de la columna pandeada.

LONGITUDES EFECTIVAS (Relación con Euler). 76.

Relación para columnas con varias condiciones de soporte se pueden relacionar con la carga crítica de una columna con extremos articulados.

L_e es la longitud de la columna equivalente con extremos articulados, es decir, es la long. de una columna con extremos articulados con una curva de deflexión que concuerda exactamente con toda o parte de la curva de deflexión de la columna original.

$$L_e = K \cdot L$$



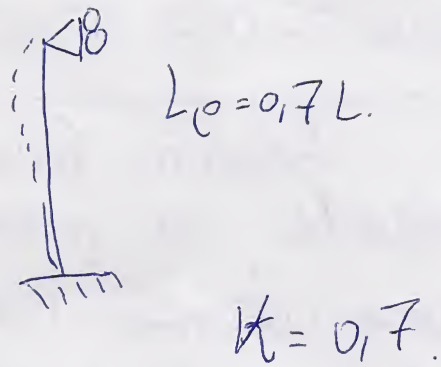
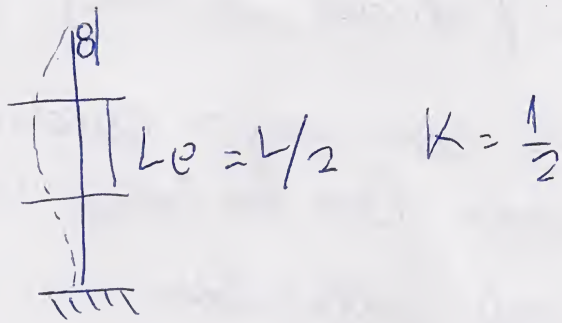
$$L_e = 2L.$$

$$P_{CR} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_e^2}$$

La L_e a menudo se expresa en términos de factor de longitud efectiva K

$$L_e = K \cdot L \rightarrow \text{longitud real de la C.}$$

$\hookrightarrow K = 2$ con columna empotrada



L_e (Resumen de MARCOS).

Es la longitud de una columna con extremos articulados con una curva de deflexión que concuerda exactamente con toda o parte de la curva de deflexión de la columna original. Puede expresarse también como la mayor distancia entre puntos de inflexión de la curva de deflexión de la viga, suponiendo que la curva se extiende hasta alcanzar los puntos de inflexión si fuese necesario.

$$P_{CR} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_e^2}$$

$$E-E : 0,5l$$

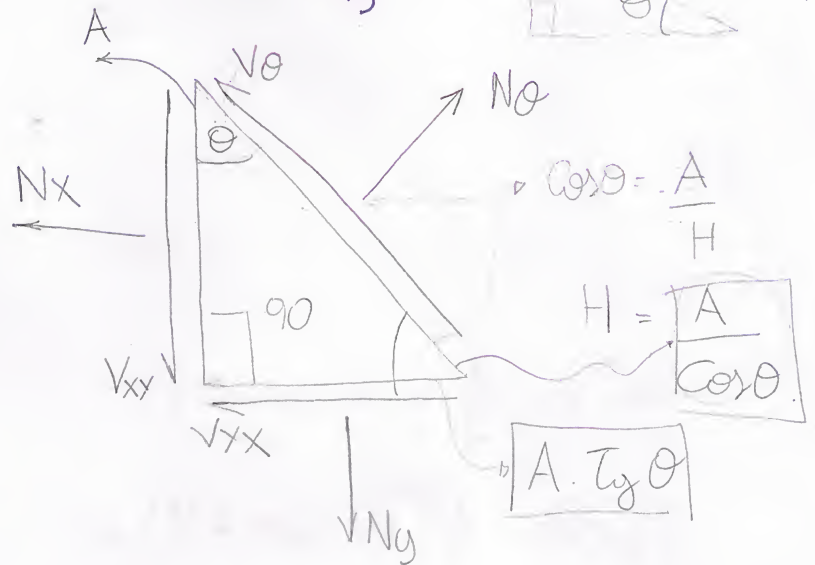
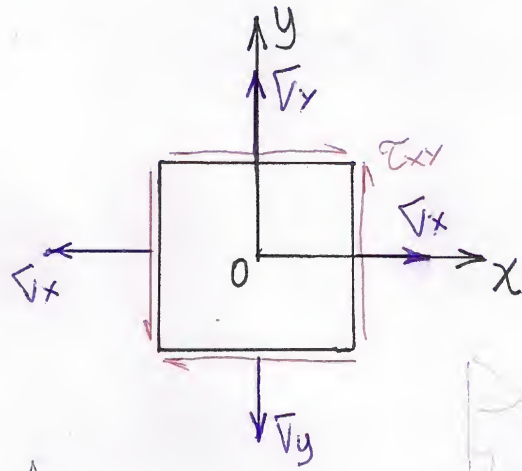
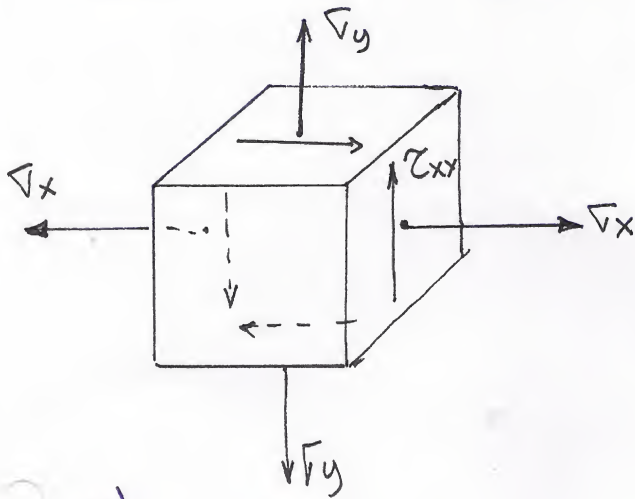
$$E-A : 0,7l$$

$$ES = 2$$

ESFUERZOS SOBRE SECCIONES INCLINADAS.

77

° elemento de esfuerzo en forma de cuña.



$$N_x = \sigma_x \cdot A$$

$$N_y = \sigma_y \cdot A \cdot \tan \theta$$

$$V_{xy} = \tau_{xy} \cdot A$$

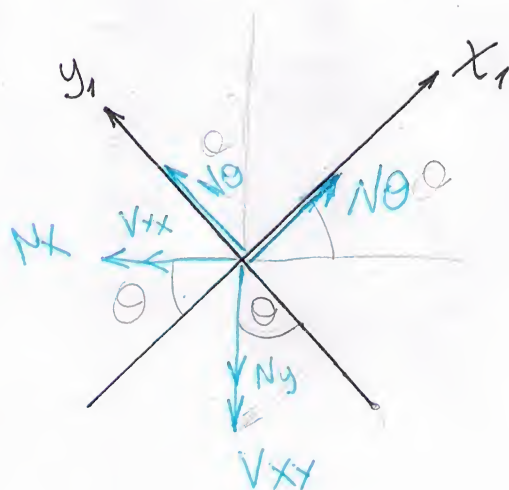
$$V_{yx} = \tau_{yx} \cdot A \cdot \tan \theta$$

$$N_\theta = \frac{\sigma_{x1} \cdot A}{\cos \theta}$$

$$V_\theta = \frac{\tau_{x1y1} \cdot A}{\cos \theta}$$

$$\tau_{y\theta} = \frac{\sigma_p}{A}$$

$A \cdot \tan \theta$



$$\Sigma F_{x_1} = N_\theta - N_x \cdot \cos \theta - V_{yx} \cdot \cos \theta - N_y \cdot \sin \theta - V_{xy} \cdot \sin \theta = 0$$

$$= \frac{V_{x_1} \cdot A}{\cos \theta} - V_x \cdot A \cdot \cos \theta - \tau_{yx} A \cos \theta - V_y \cdot A \cdot \sin \theta - \tau_{xy} A \sin \theta - \tau_{yx} A \sin \theta = 0$$

$$\frac{V_{x_1} \cdot A}{\cos \theta} = V_x \cdot A \cdot \cos \theta + \tau_{yx} A \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \cos \theta + V_y A \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} + \tau_{xy} A \sin \theta$$

$$V_{x_1} = A \left(V_x \cdot \cos \theta + V_y \cdot \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} + \tau_{yx} \cdot \sin \theta + \tau_{xy} \cdot \sin \theta \right)$$

$$\frac{V_{x_1}}{\cos \theta} = \left(V_x \cdot \cos \theta + V_y \cdot \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} + 2 \tau_{xy} \cdot \sin \theta \right)$$

$$V_{x_1} = V_x \cdot \cos^2 \theta + V_y \sin^2 \theta + 2 \tau_{xy} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta)$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta)$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$$

$$V_{x_1} = \frac{V_x}{2} + \frac{V_x \cdot \cos^2 \theta}{2} + \frac{V_y}{2} - \frac{V_y \cdot \cos 2\theta}{2} + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$V_{x_1} = \frac{V_x + V_y}{2} + \frac{V_x - V_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$V_{y_1} = V_x (\theta + 90) = \frac{V_x + V_y}{2} - \frac{V_x - V_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_{y_1} &= V_\theta - N_y \cdot \cos \theta - V_{xy} \cdot \cos \theta + N_x \cdot \sin \theta + V_{yx} \cdot \sin \theta \\ &= \tau_{x_1 y_1} \cdot \frac{A}{\cos \theta} - \sigma_y \cdot A \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \cancel{\cos \theta} - \tau_{xy} \cdot A \cdot \cancel{\cos \theta} + \sigma_x \cdot A \cdot \sin \theta + \\ &\quad + \tau_{yx} \cdot A \cdot \tau_{yx} \theta \cdot \sin \theta = 0.\end{aligned}$$

$$\tau_{x_1 y_1} \cdot \frac{A}{\cos \theta} = \sigma_y \cdot A \sin \theta + \tau_{xy} \cdot A \cos \theta - \sigma_x \cdot A \sin \theta - \tau_{yx} \cdot A \cdot \tau_{yx} \theta \cdot \sin \theta$$

$$\frac{\tau_{x_1 y_1}}{\cos \theta} = \left(\sigma_y \sin \theta + \tau_{xy} \cos \theta - \sigma_x \sin \theta - \tau_{yx} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \right)$$

$$\tau_{x_1 y_1} = \sigma_y \sin \theta \cdot \cos \theta - \sigma_x \sin \theta \cdot \cos \theta + \tau_{xy} \cos^2 \theta - \tau_{yx} \sin^2 \theta$$

$$\tau_{x_1 y_1} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$\tau_{x_1 y_1} = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\begin{aligned}\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta + \\ &\quad + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta\end{aligned}$$

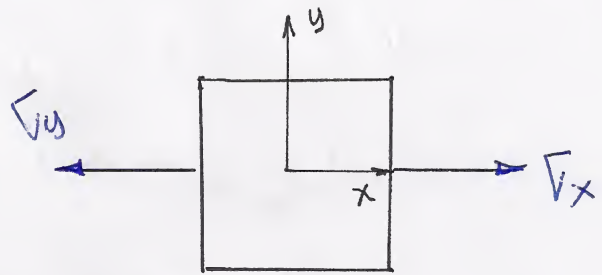
$$\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_y}{2}$$

$$\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} = \sigma_x + \sigma_y$$

Casos especiales de esfuerzos planos.

ESFUERZO
UNIAXIAL

$$\begin{cases} \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

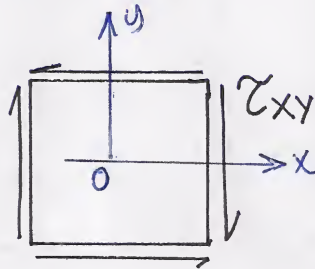


$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x}{2} (1 + \cos(2\theta))$$

$$\tau_{x_1 y_1} = -\frac{\sigma_x}{2} \sin(2\theta)$$

CORTANTE PURO

$$\begin{cases} \sigma_x = 0 \\ \sigma_y = 0 \end{cases}$$

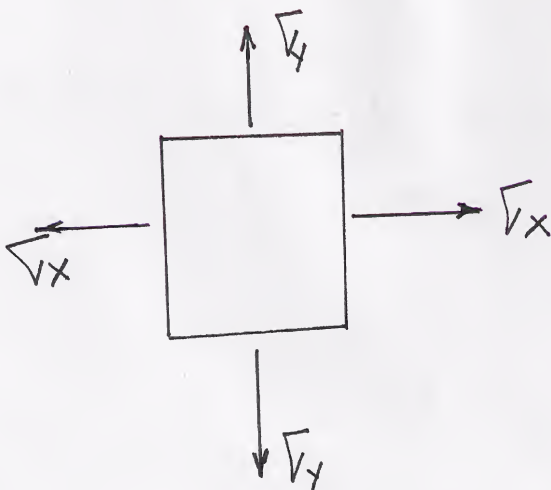


$$\sigma_{x_1} = \tau_{xy} \sin(2\theta)$$

$$\tau_{x_1 y_1} = \tau_{xy} \cos(2\theta)$$

ESFUERZO
BIAXIAL

$$\tau_{xy} = 0$$



$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta)$$

$$\tau_{x_1 y_1} = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \sin(2\theta)$$

TENSIONES PRINCIPALES

79

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\frac{d\sigma_{x_1}}{d\theta} = 0 + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) - \sin 2\theta \cdot 2 + 2\tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\frac{d\sigma_{x_1}}{d\theta} = -2 \cdot \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \sin 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\frac{d\sigma_{x_1}}{d\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta_p + 2\tau_{xy} \cos 2\theta_p$$

$$\frac{d\sigma_{x_1}}{d\theta} = 0$$

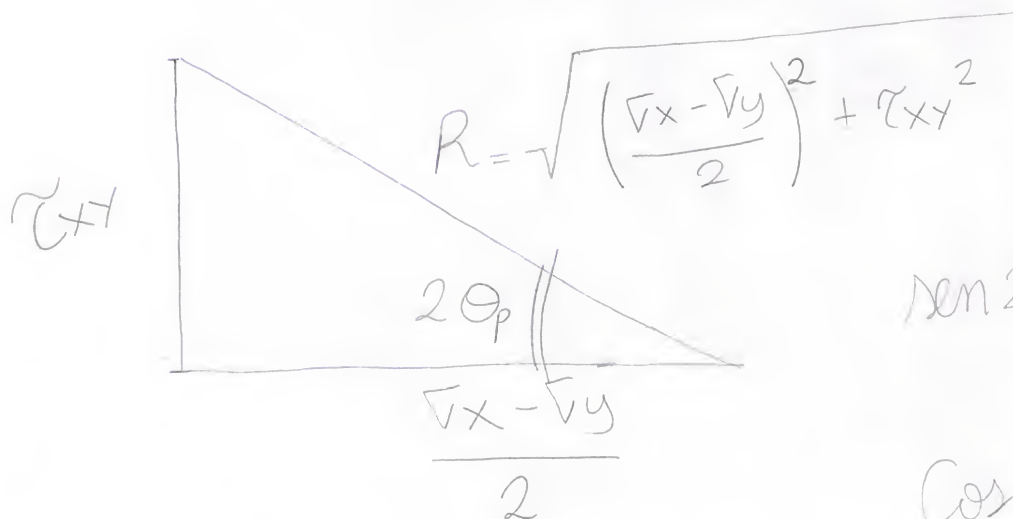
igualado a 0

$$\sin 2\theta_p (\sigma_x - \sigma_y) = 2\tau_{xy} \cos 2\theta_p$$

$$\frac{\sin 2\theta_p}{\cos 2\theta_p} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

DIRECCIÓN PRINCIPAL



$$\sin 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{R}$$

$$\cos 2\theta_p = \frac{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}{R}$$

Reemplazo en la ecuación de transformación

$$V_1 = \frac{V_x + V_y}{2} + \frac{V_x - V_y}{2} \left(\frac{V_x - V_y}{2R} \right) + \tau_{xy} \cdot \frac{\tau_{xy}}{R}$$

$$V_1 = \frac{V_x + V_y}{2} + \left(\frac{V_x - V_y}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{R} + \frac{\tau_{xy}^2}{R}$$

$$V_1 = \frac{V_x + V_y}{2} + \frac{1}{R} \quad R^2$$

$$V_1 = \frac{V_x + V_y}{2} + R$$

$$V_1 + V_2 = V_x + V_y$$

$$V_2 = V_x + V_y - V_1$$

$$V_2 = V_x - V_y - \frac{V_x + V_y}{2} - R$$

$$V_2 = V_x - V_y - \frac{V_x}{2} - \frac{V_y}{2} - R$$

$$V_2 = \frac{V_x - V_y}{2} - R$$

$$\tau_{x_1 y_1} = - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

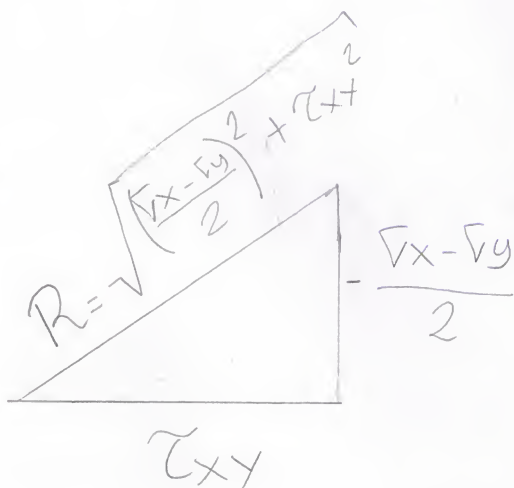
$$\frac{d\tau_{x_1 y_1}}{d\theta} = - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - 2\tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\frac{d\tau_{x_1 y_1}}{d\theta} = 0 = -(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta - 2\tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta = -2\tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}} = - \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$$

$$\boxed{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -\tan \theta_s}$$



$$\tan 2\theta_s = - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}$$

$$\cos 2\theta_s = \frac{\tau_{xy}}{R}$$

Reemplazo:

$$\tau_{x_1 y_1} = \left(- \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \left(- \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R} \right) + \tau_{xy} \cdot \frac{\tau_{xy}}{R}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{MAX} = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 \frac{1}{R} + \tau_{xy}^2 \cdot \frac{1}{R}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{1}{R} \cdot \left(\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right)$$

$$\tau_{MAX} = \frac{1}{R} \cdot R^2$$

$$\boxed{\tau_{MAX} = R}$$

$$\tau_{xy}(2\theta_s) = - \frac{1}{\tau_{xy}(2\theta_p)}$$

$$\frac{\sin 2\theta_s \cdot \sin 2\theta_p + \cos 2\theta_s \cos 2\theta_p}{\cos 2\theta_s \sin 2\theta_p}$$

$$\frac{\sin(2\theta_s)}{\cos(2\theta_s)} + \frac{\cos(2\theta_p)}{\sin(2\theta_p)} = 0$$

$$\sin(2\theta_s) \sin(2\theta_p) + \cos(2\theta_s) \cos(2\theta_p) = 0$$

$$\cos(2\theta_s - 2\theta_p) = 0$$

$$2\theta_s - 2\theta_p = \pm \frac{\pi}{2}$$

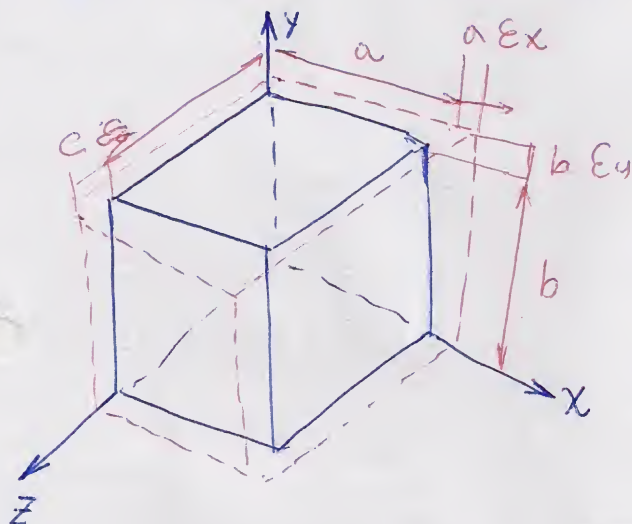
$$\boxed{\theta_s = \theta_p \pm \frac{\pi}{4}} \quad \text{relación entre } \theta_s \text{ y } \theta_p$$

los planos de ef. cortante ocurren a 45° de los planos principales

LEY DE HOOKE PARA ESFUERZO PLANO

(81)

- Se limita a materiales que cumplan que sean uniformes en todo el cuerpo y tiene las mismas prop. en todas las direcciones. (HOMOGENEO EISOTROPO)
- El material debe seguir HOOKE



	σ_x	σ_y	τ_{xy}
ϵ_x	σ_x/E	$-\sigma_y \nu/E$	0
ϵ_y	$-\sigma_x \nu/E$	σ_y/E	0
ϵ_z	$-\sigma_x \nu/E$	$-\sigma_y \nu/E$	0
γ_{xy}	0	0	τ_{xy}/G

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\sigma_y \nu}{E} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \sigma_y \nu)$$

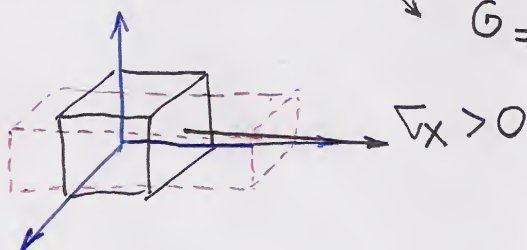
$$\epsilon_y = -\frac{\sigma_x \nu}{E} + \frac{\sigma_y}{E} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \sigma_x \nu)$$

$$\epsilon_z = -\frac{\sigma_x \nu}{E} + \left(-\frac{\sigma_y \nu}{E} \right) = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \rightarrow \text{decremento del ángulo entre las caras "x" y "y"}$$

Se considera

$$\begin{aligned} E \cdot \epsilon_x &= \sigma_x \\ \epsilon_y &= -\nu \cdot \epsilon_x \\ G &= \tau_{xy} / \gamma_{xy} \end{aligned}$$



para obtener ∇_x , ∇_y y τ_{xy} .

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\nabla_x - v \nabla_y) \Rightarrow \epsilon_x \cdot E + v \nabla_y = \nabla_x$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\nabla_y - v \nabla_x)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\nabla_y - v [\epsilon_x \cdot E + v \nabla_y])$$

$$\epsilon_y \cdot E = \nabla_y - v \cdot \epsilon_x \cdot E - v^2 \nabla_y$$

$$\epsilon_y \cdot E + v \epsilon_x \cdot E = \nabla_y - v^2 \nabla_y$$

$$E (\epsilon_y + v \epsilon_x) = \nabla_y (1 - v^2)$$

$$\boxed{\nabla_y = \frac{E}{(1-v^2)} (\epsilon_y + v \epsilon_x)}$$

$$\boxed{\nabla_z = 0}$$

$$\boxed{\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}}$$

No hay ∇_x por
 $\exists \epsilon_x$.

$$\epsilon_y \cdot E = \nabla_y - v \nabla_x$$

$$\epsilon_y \cdot E + v \nabla_x = \nabla_y$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\nabla_x - v [\epsilon_y \cdot E + v \nabla_x])$$

$$\epsilon_x \cdot E = \nabla_x - v \epsilon_y \cdot E - v^2 \nabla_x$$

$$\epsilon_x \cdot E = \nabla_x - v \epsilon_y \cdot E - v^2 \nabla_x$$

$$\epsilon_x \cdot E + v \epsilon_y \cdot E = \nabla_x - v^2 \nabla_x$$

$$E (\epsilon_x + v \epsilon_y) = \nabla_x (1 - v^2)$$

$$\boxed{\nabla_x = \frac{E}{(1-v^2)} (\epsilon_x + v \epsilon_y)}$$

Se recuerda que existe una relación entre
 E , G y ν

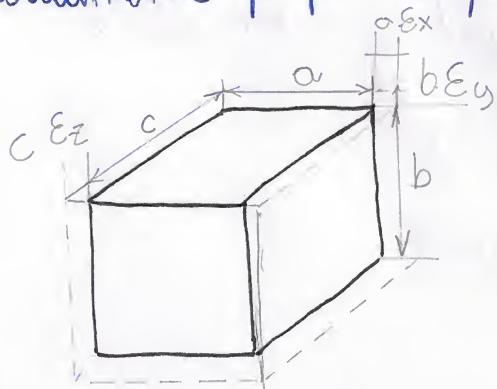
$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

CAMBIO DE VOLUMEN

Los objetos al experimentar def. ⁽⁸²⁾

Cambian tanto sus dimensiones como su volumen.

Conociendo las def. normales en tres direcciones mutuamente perp. se puede determinar el cambio de volumen.



$$V_0 = a \cdot b \cdot c$$

$$V_1 = (a + a\epsilon_x)(b + b\epsilon_y)(c + c\epsilon_z)$$

$$V_1 = \underbrace{a \cdot b \cdot c}_{V_0} (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z)$$

$$V_1 = V_0 (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z)$$

$$(1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y) = 1 + \epsilon_y + \epsilon_x + 0 = 1 + \epsilon_y + \epsilon_x$$

$$\begin{aligned} (1 + \epsilon_z)(1 + \epsilon_y + \epsilon_x) &= (1 + \epsilon_y + \epsilon_x + \epsilon_z + 0 + 0) \\ &= (1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) \end{aligned}$$

$$V_1 = V_0 (1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$$

$$\begin{aligned} \Delta V &= V_1 - V_0 = V_0 (1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) - V_0 \\ &= V_0 [(1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) - 1] \end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta V = V_0 (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)}$$

se puede emplear siempre que las def. sean pequeñas y permalezcan ctes. en todo el volumen.

NO es necesario que siga la Ley de HOOKE y no es necesario que este en estado plano.

e es el cambio de volumen unitario
o también llamado DILATACIÓN.

$$e = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V_0 (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)}{V_0} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

valores positivos en ΔV y e representan aumentos de volumen. (\ominus rep. disminuciones).

- volviendo a mat. que siguen HOOKE.
- siguen esfuerzo plano.

$$e = \frac{\Delta V}{V_0} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$$

$$e = \frac{1}{E} \cdot \left[(\sigma_x - \nu \sigma_y) + (\sigma_y - \nu \sigma_x) - (\sigma_x + \sigma_y) \right]$$

$$e = \frac{1}{E} \cdot \left(\sigma_x - \nu \sigma_y + \sigma_y - \nu \sigma_x - \sigma_x - \sigma_y \right)$$

$$e = \frac{1}{E} \left(-2\nu \sigma_y - 2\nu \sigma_x + \sigma_x + \sigma_y \right)$$

$$e = \frac{1}{E} \left[\sigma_x (1 - 2\nu) + \sigma_y (1 - 2\nu) \right] = \frac{1}{E} \left[(1 - 2\nu) (\sigma_x + \sigma_y) \right]$$

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$$

EN ESFUERZO UNIAxIAL SE SIMPLIFICA

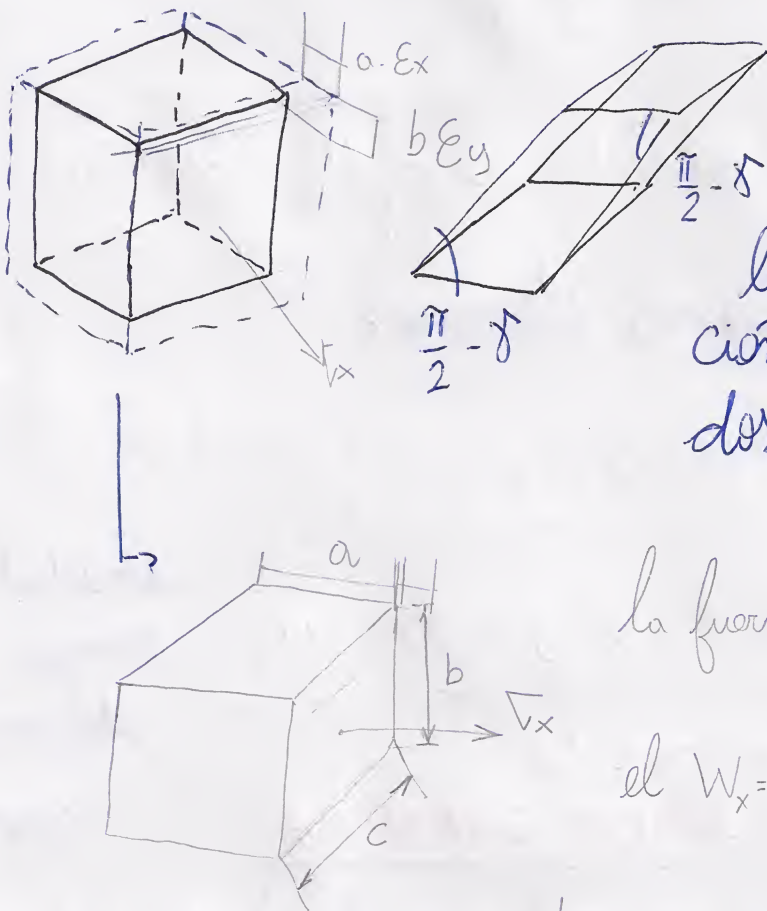
$$e = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\sigma_x}{E} (1 - 2\nu) \quad \nu_{\max} = 0,5$$

DENSIDAD DE ENERGÍA DE DEFORMACIÓN EN ESFUERZO PLANO.

(83)

U es la energía almacenada (energía de deformación) en un volumen unitario de material.

Se toma un elemento de material



las def. normales y por corte ocurren de manera independiente.

Se pueden sumar las energías de deformación a partir de estos dos elementos

la fuerza sobre x es $\sigma_x \cdot b \cdot c$

$$el W_x = \frac{1}{2} (\sigma_x \cdot b \cdot c) (a \cdot \epsilon_x)$$

de manera analoga $W_y = \frac{1}{2} (\sigma_y \cdot a \cdot c) (b \cdot \epsilon_y)$

$$suma W_x + W_y = \frac{1}{2} \sigma_x \cdot b \cdot c \cdot a \cdot \epsilon_x + \frac{1}{2} \sigma_y \cdot a \cdot c \cdot b \cdot \epsilon_y$$

$$W_x + W_y = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot c \cdot (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y)$$

$$= \frac{a \cdot b \cdot c}{2} \cdot (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y) = U$$

La densidad de energía de def.

$$U_1 = \frac{U}{V} = \frac{\overbrace{a \cdot b \cdot c}^V}{2} \cdot (\tau_x \epsilon_x + \tau_y \epsilon_y) \cdot \frac{1}{\cancel{V}}$$

$$U_1 = \frac{1}{2} (\tau_x \epsilon_x + \tau_y \epsilon_y)$$

La densidad de energía de def. por corte es

$$U_2 = \frac{\tau_{xy} \gamma_{xy}}{2}$$

al combinar ambas expresiones obtenemos

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2} (\tau_x \epsilon_x + \tau_y \epsilon_y) + \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy}$$

$$U = \frac{1}{2} (\tau_x \epsilon_x + \tau_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy})$$

densidad de energía de deformación en esfuerzos plane

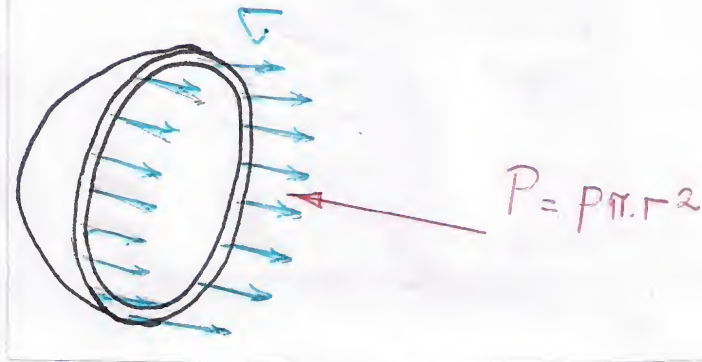
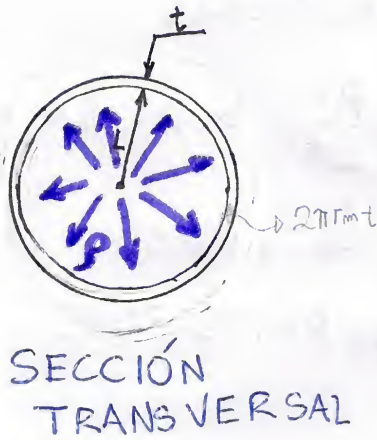
DEBOUSAR PARA SUBSTITUIR LA LEY DE HOOKE GENERALIZADA.

$$U = \frac{1}{2E} (\tau_x^2 + \tau_y^2 - 2\nu \tau_x \tau_y) + \frac{\tau_{xy}^2}{2G}$$

densidad de energía en función de los esfuerzos.

$$U = \frac{E}{2(1-\nu^2)} (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + 2\nu \epsilon_x \epsilon_y) + \frac{G \cdot \gamma_{xy}^2}{2}$$

densidad de energía en función de los def. unitarios



D.C.L.

P es la presión manométrica. $P \gg P_{ext.}$!

∇ es uniforme por la simetría de la figura, ∇ está distribuido uniformemente a través de t . por ser pared delgada.

$$\sum F_h = \nabla \cdot (2\pi \cdot r_m \cdot t) - P \pi r^2 = 0$$

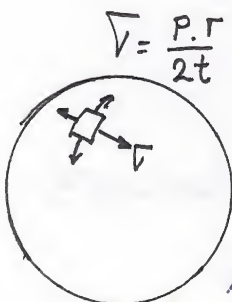
$$\nabla \cdot (2\pi \cdot r_m \cdot t) = P \cdot \pi \cdot r^2$$

$$\nabla = \frac{P \cdot \pi \cdot r^2}{2\pi r_m \cdot t}$$

$r_m \approx r$
por ser poca DIF.

$$\nabla = \frac{P \cdot r^2}{2r \cdot t}$$

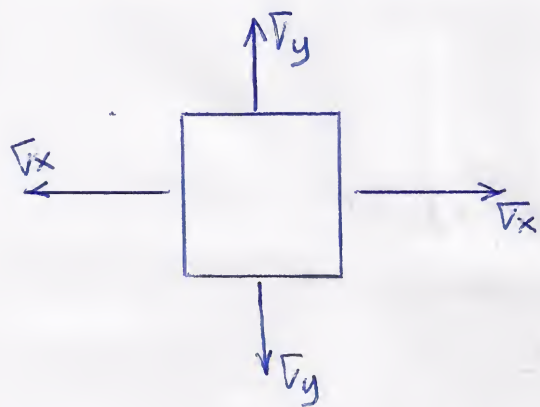
$$\boxed{\nabla = \frac{P \cdot r}{2t}}$$



La pared de un recipiente esférico presurizado está sometida a esfuerzos de tensión uniformes ∇ en todas las direcciones. NO HAY esfuerzos de corte.

por lo general se trata de un caso de esfuerzo
BIAXIAL.

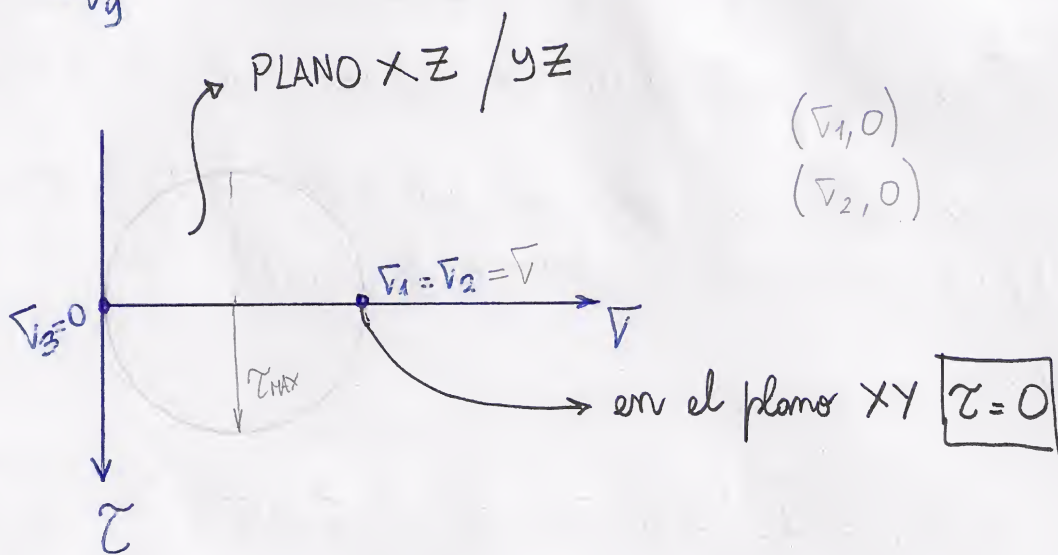
Tomando un elemento volumétrico de material



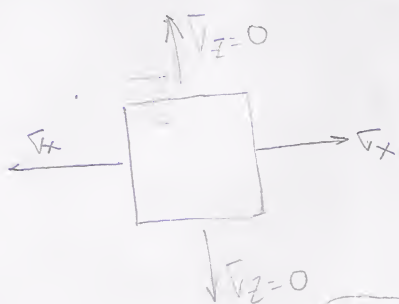
$$\sigma_y = \sigma_x = \sigma_{1,2} = \frac{P \cdot r}{2t} \rightarrow \text{en el plano } XY$$

$$\sigma_3 = 0 \rightarrow \text{en la dirección de } Z$$

σ_x y σ_y SON PRINCIPALES.



SI O SI el corte max τ_{MAX} está fuera del plano!



$$(\sigma_1, 0)$$

PLANO XZ

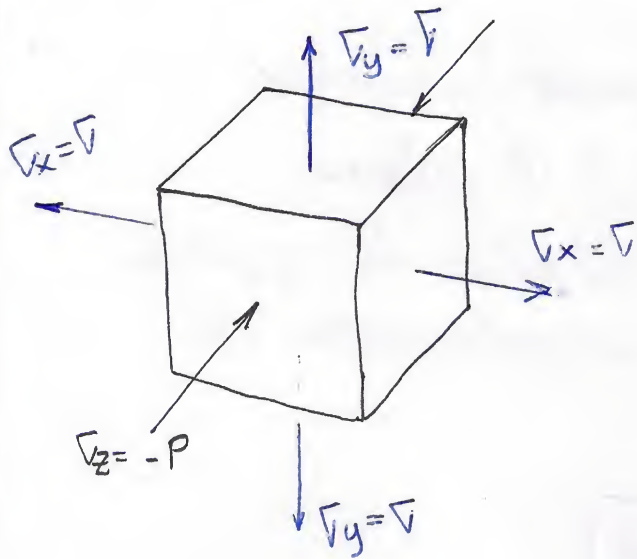
$$(0, 0)$$

$$\tau_{MAX} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{\sigma}{2} = \tau_{MAX}$$

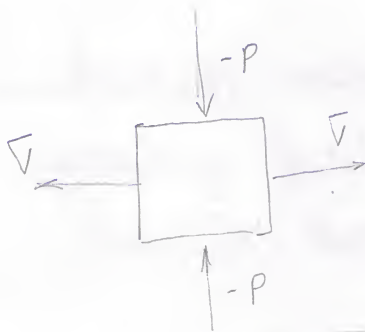
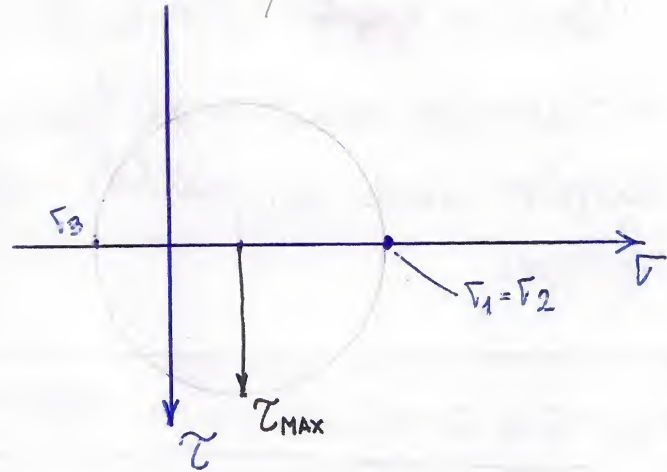
$$\tau_{MAX} = \frac{P \cdot r}{2t} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{P \cdot r}{4t}} \rightarrow \text{A } 45^\circ \text{ de las direcciones principales}$$

TODO ESTO OCURRE EN EL EXTERIOR

SUP. INTERIOR



$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{P \cdot \bar{\sigma}}{2t} = \bar{\sigma} \\ \sigma_3 = -P \\ \tau_{x \neq y/z} \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}, 0 \\ -P, 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \tau$$

$$\tau_{MAX} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_{MAX}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{\bar{\sigma} + P}{2}$$

τ_{MAX} a 45° Con respecto a X o Y

En el plano $\tau = 0$

$$\tau_{MAX} = \frac{P \cdot \bar{\sigma}}{4t} + \frac{P}{2} = \frac{P}{2} \left(\frac{\bar{\sigma}}{2t} + 1 \right)$$

$\frac{\bar{\sigma}}{t} \gg 10$ (por ser de pared delgada)
 $\bar{\sigma}_3$ es muy pos. en comp. a $\bar{\sigma}_1$ y $\bar{\sigma}_2$

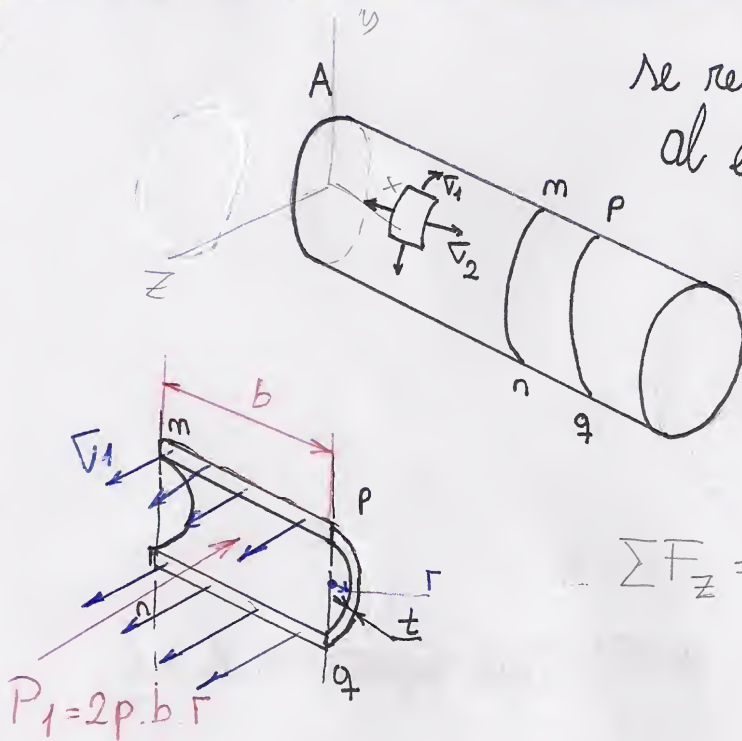
$$\tau_{MAX} = \frac{P \cdot \bar{\sigma}}{4t}$$

CONSIDERACIONES

- $\frac{r}{t} \gg 10$ (Pared delgada)
- $P_{int} \gg P_{ext}$ para evitar el pandeo hacia dentro.
- Análisis basado solo en efectos de P . interna.
- Formulas validas en toda la pared del recipiente, excepto cerca de puntos de concentraciones de esfuerzos.

RECIPIENTES CILINDRICOS A PRESIÓN

Se realizan 2 cortes perpendiculares al eje longitudinal y otro en el plano vertical.



$$\sum F_z = -P_1 + P_{\sigma_1} = 0$$

$$P_{\sigma_1} = P_1$$

$$\sigma_1 (2.b.t) = 2p.b.r$$

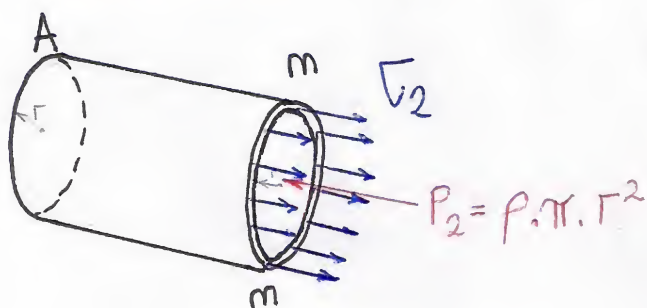
$$\sigma_1 = \frac{2P.b.r}{2.b.t}$$

σ_1 se denomina esfuerzo circunferencial.

$$\sigma_1 = \frac{P.r}{t}$$

para determinar σ_2

(86)



$$\sum F_x = P_{\sigma_2} - P_2 = 0$$

$$P_{\sigma_2} = P_2$$

$$\sigma_2 (2\pi \cdot r \cdot t) = P \cdot \pi \cdot r^2$$

σ_2 es el esfuerzo longitudinal

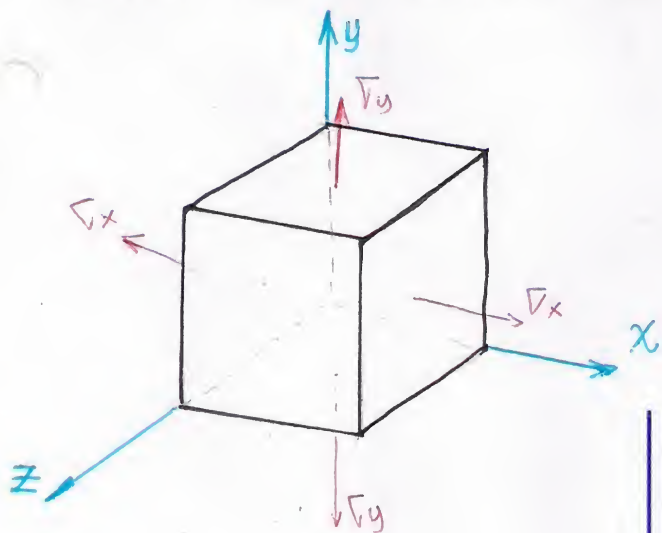
$$\sigma_2 = \frac{P \cdot \pi \cdot r^2}{2\pi \cdot r \cdot t}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{2}$$

$$2\sigma_2 = \sigma_1$$

$$\boxed{\sigma_2 = \frac{P \cdot r}{2t}}$$

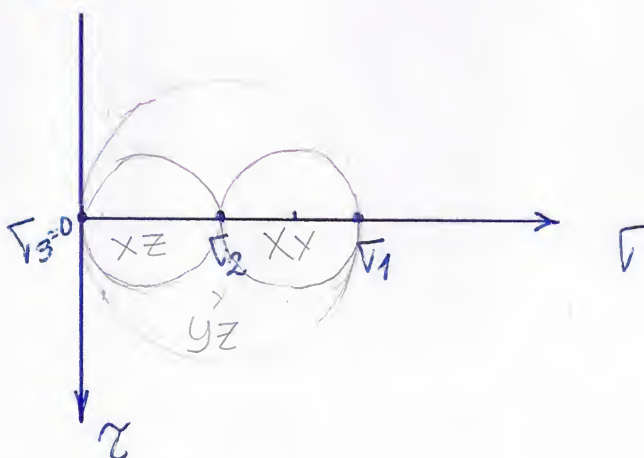
ESFUERZOS EN EL EXTERIOR. (PARED EXTERNA)



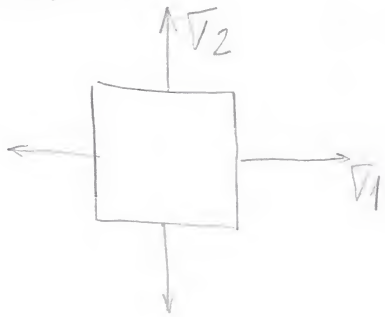
$$\sigma_1 = \frac{P \cdot r}{t} \quad P_1(x, y) = (\sigma_1, 0)$$

$$\sigma_2 = \frac{P \cdot r}{2t} \quad P_2(x, y) = (\sigma_2, 0)$$

$$\sigma_3 = 0$$



CORTE EN YX



$$\tau_{MAX} = \sqrt{\left(\frac{V_1 - V_2}{2}\right)^2 + 0^2}$$

$$(\tau_{MAX})_Z = \frac{V_1 - V_2}{2}$$

$$\tau_{MAX_Z} = \frac{P \cdot r}{2t} - \frac{P \cdot r}{4t}$$

$$= \frac{P \cdot r}{2t} \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{P \cdot r}{2t} \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\tau_{MAX} = \frac{P \cdot r}{4t} \quad \text{en el plano}$$

CORTE EN XZ



$$R = \sqrt{\left(\frac{V_2 - V_3}{2}\right)^2 + 0^2}$$

$$R = \frac{V_2}{2} = \tau_{MAX}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{P \cdot r}{4t}$$

CORTE EN EL YZ



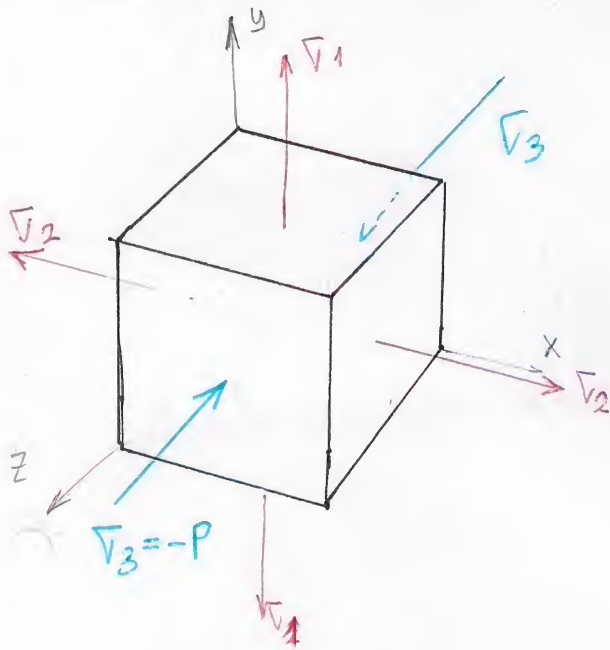
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 + 0^2}$$

$$R = \frac{\sigma_1 - 0}{2} = \frac{\sigma_1}{2}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{P \cdot \Gamma}{2t}$$

ESF. CORTE MAXIMO ABSOLUTO.

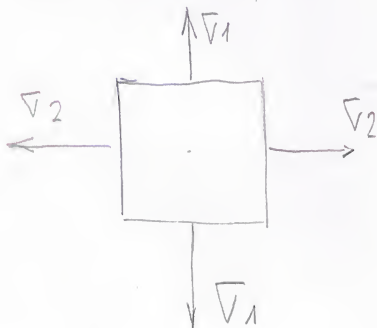
ESFUERZOS EN EL INTERIOR



EN EL INTERIOR

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{P \cdot \Gamma}{t} \\ \sigma_2 = \frac{P \cdot \Gamma}{2t} \\ \sigma_3 = -P \end{cases}$$

EN EL PLANO XY

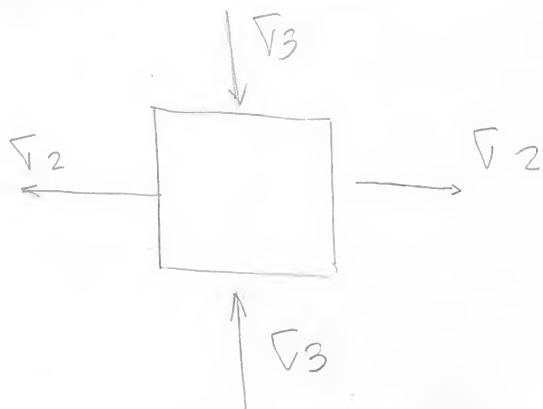


$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 - 0^2}$$

$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \tau_{MAX}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{P \cdot \Gamma}{2t} - \frac{P \cdot \Gamma}{4t} = \boxed{\frac{P \cdot \Gamma}{4t}}$$

EN EL PLANO ZX

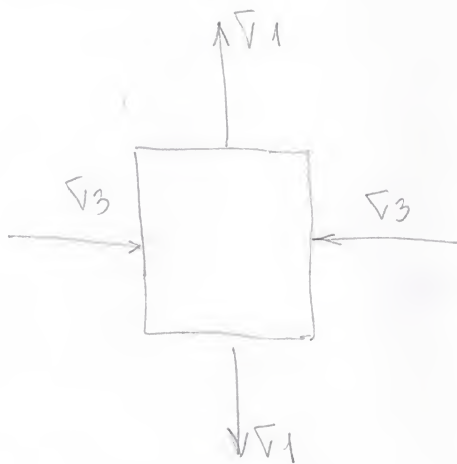


$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 + 0^2}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = \frac{P\Gamma}{4t} + \frac{P}{2}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{P}{2} \left(\frac{\Gamma}{2t} + 1 \right) \quad \frac{\Gamma}{t} \gg 10 \quad \frac{P}{2}$$

PLANO YZ

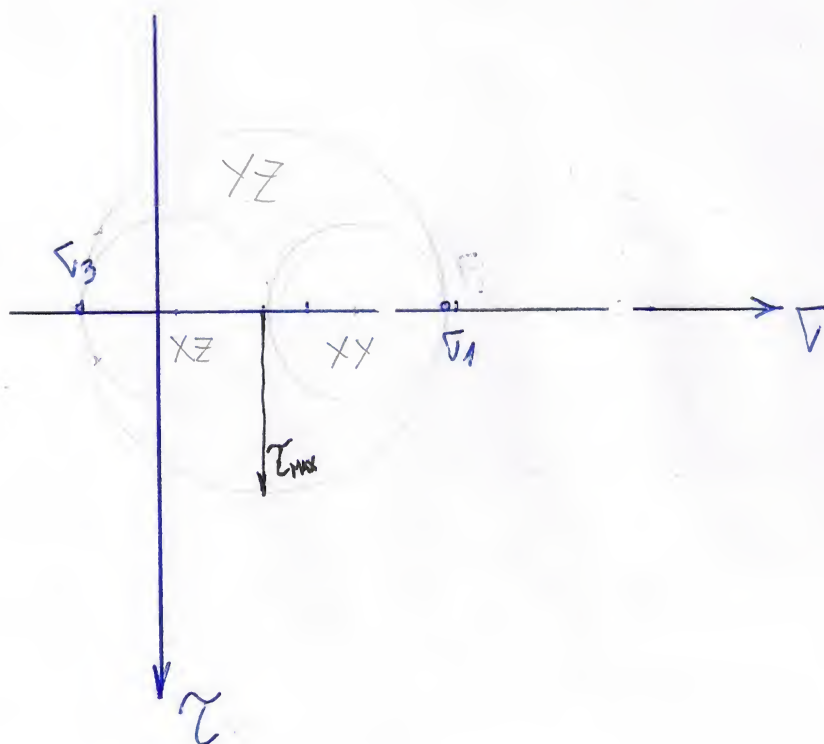


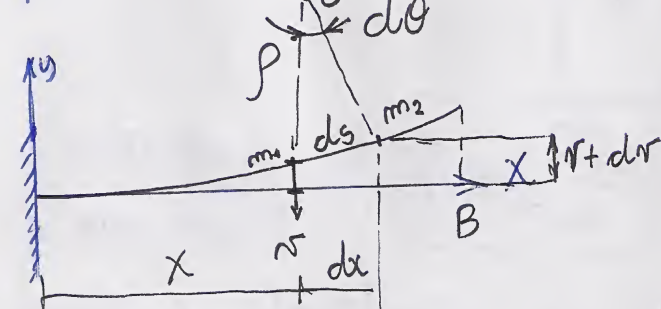
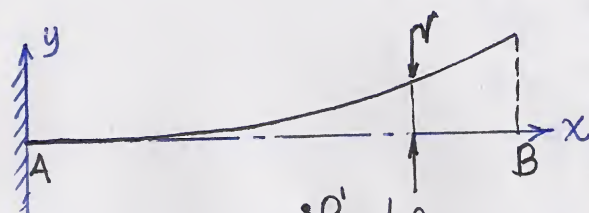
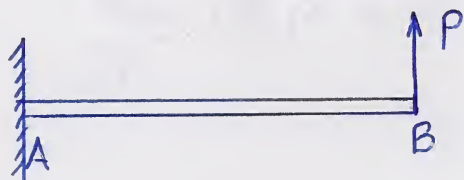
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 + 0^2}$$

$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{P\Gamma}{2t} + \frac{P}{2} = \tau_{MAX}$$

$$\tau_{MAX} = \frac{P}{2} \left(\frac{\Gamma}{2t} + 1 \right) \quad \frac{\Gamma}{t} \gg 10 \quad \frac{P}{2}$$

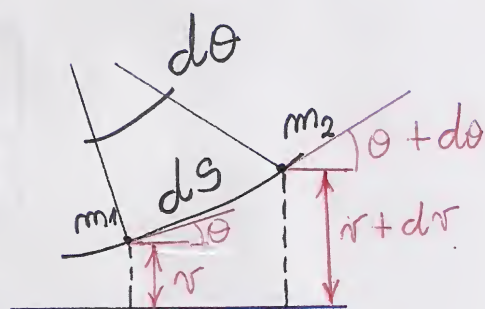
$\frac{P}{2}$ se puede quitar, si son expresiones de pared delgada.





• Ec. dif. de la Curva de deflexión.

↳ TODA parte de ahí.



Las secciones permanecen perpendiculares y planas a la directriz formada. Además, los ángulos son muy pequeños. (HIPÓTESIS).

$$P \cdot d\theta = ds$$

$$K_c = 1/\rho = \frac{d\theta}{ds} \rightarrow \text{CURVATURA}$$

$$\frac{dv}{dx} \rightarrow \text{pendiente de la curva de def.}$$

dv y dx son INFINITAMENTE PEQUEÑOS

$$\frac{dv}{dx} = \tan \theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \left(\frac{dv}{dx} \right)$$

$$\cos \theta = \frac{dx}{ds}$$

$$\sin \theta = \frac{dv}{ds}$$

◦ ANGULO DE ROTACIÓN PEQUEÑO.

$$\theta \text{ es MUY PEQUEÑO} \longrightarrow \theta \approx \tan \theta = \frac{dv}{dx}$$
$$\hookrightarrow ds \approx dx$$

$$k_c = \frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dx} = \frac{1}{\rho}$$

$$\boxed{\frac{dv}{dx} = \theta}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \boxed{\frac{d^2v}{dx^2} = k_c} \quad \text{Ec. CINEMATICA (LINEALIZADA)}$$

◦ Si el material de la viga es Linealmente elástico y sigue la ley de Hooke

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I}$$

$$k_c = \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot I}$$

BERNOULLI

$$\boxed{\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{E \cdot I}} \quad \text{ECUACIÓN CONSTITUTIVA}$$

$$M(x) = E \cdot I \cdot \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)$$

- se puede aplicar el principio de Superposición. (es lineal)
- para resolverla es necesario conocer $M(x)$.

$$\frac{dV}{dx} = -q$$

$$\frac{dM}{dx} = V$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^3 \nu}{dx^3} E I \right)$$

$$-q = \frac{d^4 \nu}{dx^4} E I$$

$$\nu'' = \frac{M}{E I}$$

$$M = \nu'' E I$$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx} (\nu'' E I) = V$$

$$V = \frac{d}{dx} (\nu''' E I)$$

METODO DE SUPERPOSICION

La deflexión de una viga producida por cargas diferentes que actúan simultáneamente, puede encontrarse suponiendo las deflexiones producidas por las mismas al actuar por separado.

Se basa en la linealidad de las ec. diferenciales, sus efectos se pueden sumar o superponer de manera algebraica.

es válido si

- la ley de hooke es válida para el material
- deflexiones y rotaciones pequeñas.
- la presencia de las deflexiones no altera las acciones de las cargas aplicadas

EXPRESIÓN EXACTA PARA LA CURVATURA

$$K_c = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d \left(\arctan \left(\frac{dr}{dx} \right) \right)}{dx} \frac{dx}{ds}$$

$$\theta = \tan^{-1}(r')$$

$$ds^2 = dx^2 + dr^2$$

$$ds = (dx^2 + dr^2)^{1/2}$$

$$\frac{ds}{dx} = \left[1 + \left(\frac{dr}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} = [1 + (r')^2]^{1/2}$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{[1 + (r')^2]^{1/2}}$$

$$\frac{d}{dx} (\arctan r') = \frac{r''}{1 + (r')^2}$$

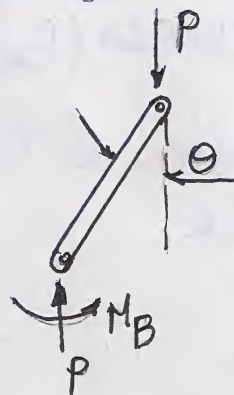
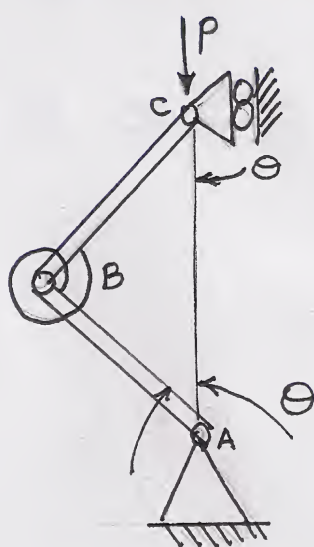
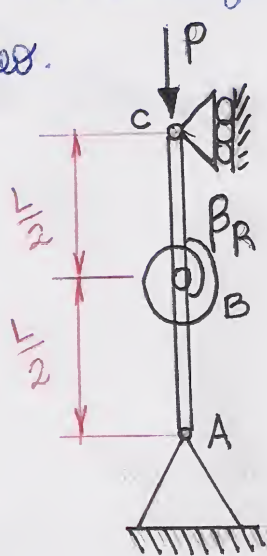
Substituyo

$$K_c = \frac{1}{\rho} = \frac{r''}{[1 + (r')^2]^{3/2}}$$

PANDEO Y ESTABILIDAD.

(90)

Se analiza una estructura idealizada, o modelo de pandeo.



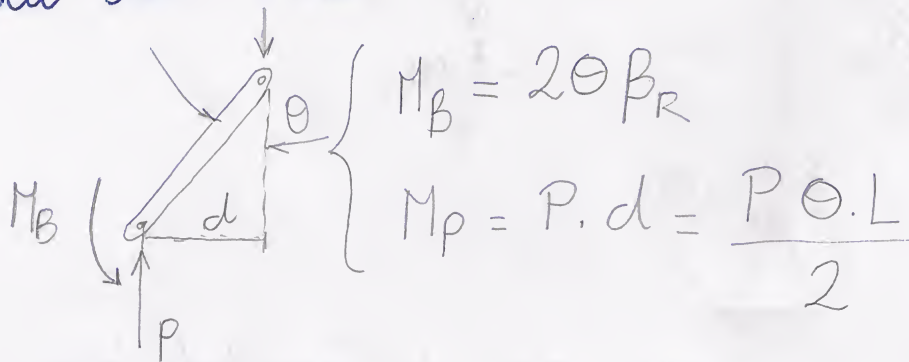
Se tienen dos barras rígidas AB y BC de longitud $L/2$, unidas en B por un pasador y mantenidas en posición vertical por un resorte rotacional con rigidez B_R . Ambas barras están perfectamente alineadas, el resorte inicialmente no está sometido a esfuerzo y las barras están en compresión directa.

Una carga externa provoca que el punto B se mueva una distancia pequeña en sentido lateral. Gira un θ y se produce un momento en el resorte, el cual busca regresar a la estructura a su posición original, el momento se denomina RESTITUTIVO; sin embargo P busca incrementar el desp. lateral.

- Si P es pequeña, M_R recuperará la posición original de la estructura. (estructura en equilibrio ESTABLE).
- Si P es grande, el desplazamiento en B aumentará y la estructura colapsará. (la estructura es INESTABLE), falla por PANDEO LATERAL.

La transición entre las condiciones estable e inestable ocurre para un valor especial de la fuerza axial conocido como CARGA CRÍTICA (P_{CR}).

Considerando el modelo anterior, en perturbación, se busca det. P_{CR} .



$$\sum M_B = M_B - M_P = 0 \quad \text{Ecuación de equilibrio.}$$

$$2\theta \beta_R - \frac{P \cdot \theta \cdot L}{2} = 0$$

$$\theta \left(2\beta_R - \frac{P \cdot L}{2} \right) = 0$$

Con $\theta = 0$ (TRIVIAL), significa que la estructura se encuentra en equilibrio cuando es perfectamente recta, sin importar el valor de P .

Con $\theta \neq 0$

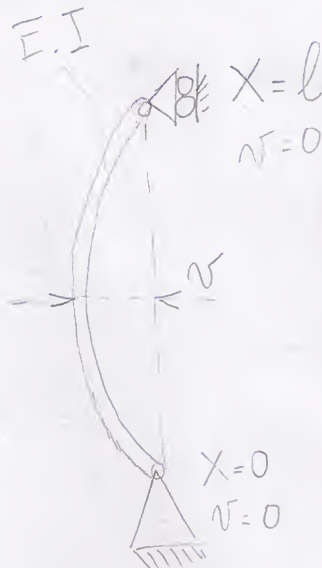
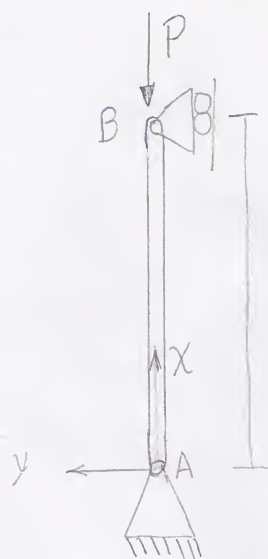
$$2\beta_R - \frac{P \cdot L}{2} = 0 \quad (\text{igualo a 0 el término entre paréntesis}).$$

$$2\beta_R = \frac{P \cdot L}{2}$$

$$\boxed{\frac{4\beta_R}{L} = P_{CR}}$$

COLUMNAS CON EXTREMOS ARTICULADOS

(91)



$$M = -P \cdot v$$

Columna perfectamente recta, sin imperfecciones y hecha de material linealmente elástico que sigue la ley de Hooke. De la llama COLUMNA IDEAL.

$$P < P_{CR} \text{ Eq. ESTABLE}$$

$$P = P_{CR} \text{ Eq. NEUTRO (O INDIFERENTE)}$$

$$P > P_{CR} \text{ Eq. INESTABLE.}$$

Se empieza

$$v'' = \frac{M}{E.I}$$

$$v'' \cdot E.I = M$$

$$v'' \cdot E.I = -P \cdot v$$

$$E.I \cdot v'' + P \cdot v = 0$$

M es el momento flector

$$v'' \cdot E.I + P \cdot v = 0$$

RESUELVO LA EDH de 2^{do} ORDEN LINEAL Y CON coef. ctes.

SOLUCIÓN

$$K^2 = \frac{P}{E.I} \quad \text{or} \quad K = \sqrt{\frac{P}{E.I}}$$

$$\frac{E.I \cdot v''}{E.I} + \frac{P \cdot v}{E.I} = \frac{0}{E.I}$$

$$v'' + K^2 \cdot v = 0$$

$$y'' + k^2 y = 0$$

→ E.C. CARACTERISTICA

$$\begin{cases} \alpha + i\beta \\ \alpha - i\beta \end{cases}$$

$$r^2 + 0r + k^2 = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot 1 \cdot k^2}}{2}$$

$$r_1 = \frac{0 + \sqrt{-4k^2}}{2} = \frac{0}{2} + \frac{2ik}{2} = \overset{\alpha}{0} + i \overset{\beta}{k}$$

$$r_2 = \frac{0 - \sqrt{-4k^2}}{2} = 0 - \frac{2ik}{2} = 0 - ik$$

• Sol. GENERAL.

$$y_G = A \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + B \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)$$

$$y = A \cdot e^0 \cdot \cos(kx) + B \cdot e^0 \cdot \sin(kx)$$

$$y = A \cdot \cos(kx) + B \cdot \sin(kx)$$

• DET. COEFICIENTES.

$$y(0) = 0 \quad (x=0) \quad \checkmark$$

$$y(L) = 0 \quad (x=L)$$

$$0 = A \cdot \cos(kx) + B \cdot \sin(kx)$$

$$0 = A \cdot \cos(0) + B \cdot \sin(0)$$

$$0 = A \cdot \cos(0)$$

$$\rightarrow \boxed{A=0} \quad \checkmark$$

NOS QUEDA

92

$$v = B \cdot \sin(K \cdot x)$$

USO LA SEGUNDA
CONDICIÓN

$$0 = B \cdot \sin K \cdot L$$

DEFLEXIÓN

$$\begin{array}{l} \text{L} \rightarrow \textcircled{1} B = 0 \rightarrow v = 0 \rightarrow \text{COLUMNA RECTA} \rightarrow (\text{SOLUCIÓN TRIVIAL}) \\ \text{L} \rightarrow \textcircled{2} \sin K \cdot L = 0 \end{array}$$

$$\text{L} \rightarrow K \cdot L = 0, \pi, 2\pi, \dots$$

$$\text{L} \rightarrow K \cdot L = 0 \rightarrow P = 0. \text{ NO ME INTERESA}$$

$$KL = n \cdot \pi \quad n = 1, 2, 3, \text{etc}$$

$$v = B \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right) \quad P. n$$

$$E I \cdot v'' + P \cdot B \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right) = 0$$

$$\bullet v' = B \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right) \cdot \frac{n \cdot \pi}{L}$$

$$\bullet v'' = -\frac{B \cdot n \cdot \pi}{L} \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right) \cdot \frac{n \cdot \pi}{L}$$

$$v'' = -B \cdot \frac{n^2 \cdot \pi^2}{L^2} \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right)$$

$$E \cdot I \cdot \left[-B \cdot \frac{n^2 \cdot \pi^2}{L^2} \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right) \right] + P \cdot \left[B \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right) \right] = 0$$

$$B \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{L} \cdot x\right) \left[-E \cdot I \cdot \frac{n^2 \cdot \pi^2}{L^2} + P \right] = 0$$

$$-E \cdot I \cdot \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + P = 0$$

$$P = \frac{E \cdot I \cdot n^2 \cdot \pi^2}{L^2}$$

$$P_{CR} = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

COLUMNA CON EXTREMOS ARTICULADOS $n=1$

$$P_{CR} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

δ representa la deflexión en el punto medio de la columna, y puede tener cualquier valor pequeño. (+ o -)

El pandeo tratado anteriormente se denomina PANDEO DE EULER, la P_{CR} se suele denominar CARGA DE EULER.

n es el NUMERO de SEMIONDAS, también se interpreta como numero de oscilamientos.

ESF. CRÍTICO

93

$$P_{CR} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2}$$

$$r_G = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

RADIO DE GIRO

$$\sigma_{CR} = \frac{P_{CR}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{A \cdot L^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{(L/r)^2}$$

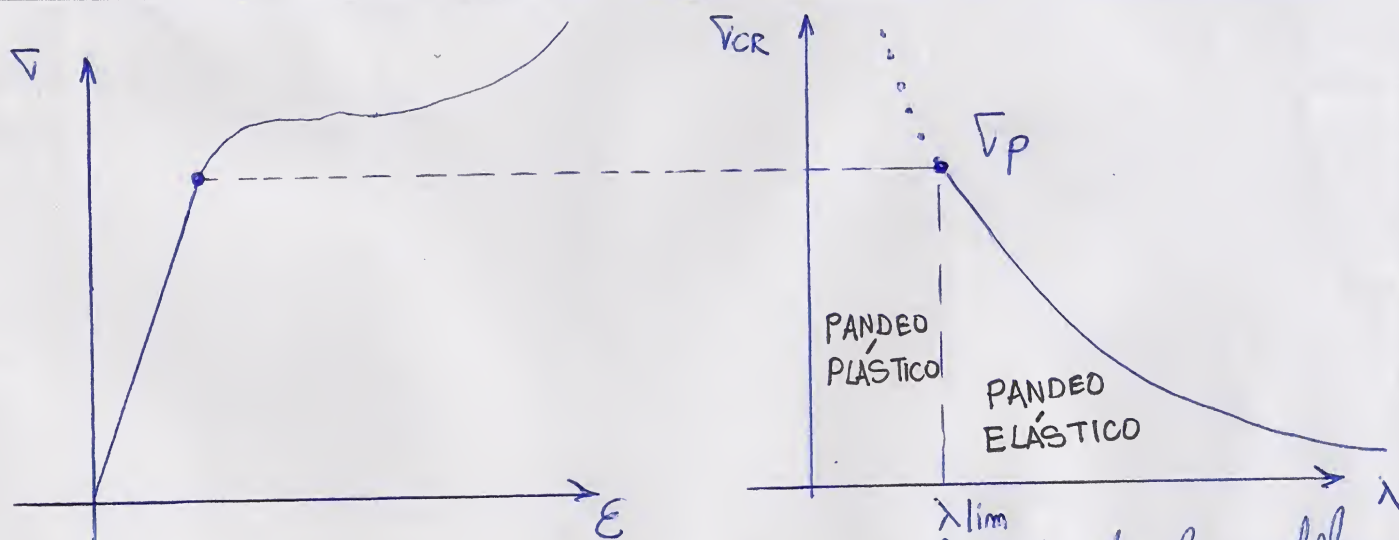
$\frac{L}{r}$ = relación de esbeltez.

$$\lambda = \frac{L}{r_G}$$

DEPENDE
DE LAS DIMENSIONES
DE LA COLUMNA

$$\sigma_{CR} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

→ Para columnas reales suele estar entre 30 y 150



CURVA DE EULER: Esfuerzo crítico en función de la esbeltez.

→ NO ES UNA HIPERBOLA! ; es una curva de una ecuación de tercer grado con dos variables.